FACHHOCHSCHULE
WIENER NEUSTADT
Austrian Network for Higher Education

Mathematik 2 - Vorlesung

WH1 am 28.09.2017

Name: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Studiengang: ______________________________

Beachten Sie bitte folgende Punkte:

- Die Prüfungsdauer beträgt 90 Minuten.
- Schreiben Sie nicht mit Bleistift oder roter Farbe.
- Skizzen können mit Bleistift angefertigt werden.
- Geben Sie *alle* Rechenschritte ausführlich an.
- Streichen Sie ungültige Lösungen durch. Es darf pro Beispiel nur eine Ausarbeitung angegeben werden, die dann auch bewertet wird.
- Sie dürfen einen einfachen, nicht programmierbaren Taschenrechner verwenden.
- Weitere Hilfsmittel wie Formelsammlung, Skriptum etc. sind nicht gestattet.

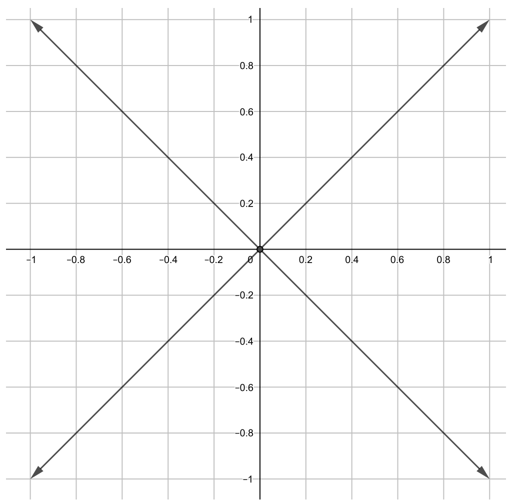
Aufgabe Nummer	1	2	3	4	5	**Gesamt**
Punktzahl	12	10	10	12	16	60
Davon erreicht						

1 Aufgabe [12 Punkte]

Lösen Sie die Gleichung $x^4 + 1 = 0$ in $\mathbb{C}$ und skizzieren Sie die Lösungen in der komplexen Zahlenebene.

Lösung:

$$
\begin{aligned}
x^4 &= -1 = \mathrm{e}^{i(\pi + 2k\pi)} \\
x_1 &= \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}} \\
x_2 &= \mathrm{e}^{\frac{i(\pi+2\pi)}{4}} = \mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}} \\
x_3 &= \mathrm{e}^{\frac{i(\pi+4\pi)}{4}} = \mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{4}} \\
x_4 &= \mathrm{e}^{\frac{i(\pi+6\pi)}{4}} = \mathrm{e}^{i\frac{7\pi}{4}}
\end{aligned}
$$



2 Aufgabe [10 Punkte]

Untersuchen Sie die Funktion

$$
f(x;y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & ,(x;y) \neq (0;0) \\ 0 & ,(x;y) = (0;0) \end{cases}
$$

auf Stetigkeit.

Lösung: Verwendung von Polarkoordinaten:

$$
\lim_{r\to 0} \frac{r\cos(\varphi) r^2 \sin(\varphi)^2}{r} = \lim_{r\to 0} (r^2 \cos(\varphi)\sin(\varphi)^2) = 0
$$

Damit ist die Funktion in $(0;0)$ stetig. In allen anderen Punkten ist sie als Komposition stetiger Funktionen wieder stetig.

3 Aufgabe [10 Punkte]

Lösen Sie die Differenzialgleichung $y' + xy = 4x$ mit $y(0) = 1$.

Lösung:

$$\frac{dy}{dx} + xy = 4x$$
$$\frac{dy}{dx} = 4x - xy = x(4-y)$$
$$\int \frac{1}{4-y} dy = \int x dx$$
$$-\ln|4-y| = \frac{x^2}{2} + c$$
$$\ln|4-y| = -\frac{x^2}{2} + c$$
$$|4-y| = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}+c} = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \cdot c_{>0}$$
$$4-y = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \cdot c$$
$$y = 4 - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \cdot c$$

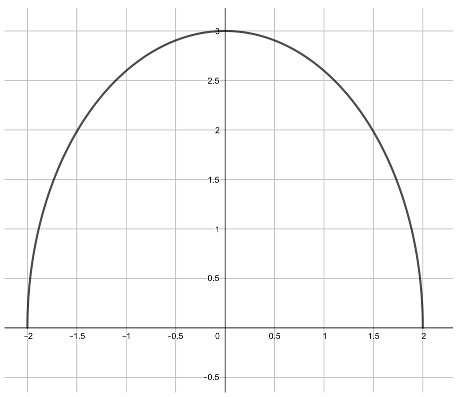
Anfangswert einsetzen:

$$1 = 4 - c \implies c = 3$$
$$y(x) = 4 - 3\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

4 Aufgabe [12 Punkte]

Skizzieren Sie die Kurve c: $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ 3\sin(t) \end{pmatrix}$, $t \in [0;\pi]$. Berechnen Sie danach das Linienintegral $\int\limits_c \vec{F} d\vec{r}$ mit $\vec{F} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$.

Lösung:



$$\int_c \vec{F} d\vec{r} = \int_0^{\pi} \begin{pmatrix} -3\sin(t) \\ 2\cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ 3\cos(t) \end{pmatrix} dt = \int_0^{\pi} (6\sin^2(t) + 6\cos^2(t)) dt$$
$$= \int_0^{\pi} 6 dt = [6t]_0^{\pi} = \mathbf{6}\pi$$

$\boxed{5}$ **Aufgabe** [16 Punkte]

Skizzieren Sie die Funktion

$$f(t) = \begin{cases} 1 & , |t| \leq 1 \\ 0 & , |t| > 1 \end{cases}$$

und berechnen Sie die Fourier-Transformierte $F(\omega)$.

Lösung:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = \int_{-1}^{1} e^{-i\omega t}\, dt = \left[\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega}\right]_{-1}^{1}$$
$$= \frac{e^{-i\omega} - e^{i\omega}}{-i\omega} = \frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{i\omega} = \frac{2i\sin(\omega)}{i\omega} = \frac{2\sin(\omega)}{\omega}$$

Für $\omega = 0$:

$$F(\omega) = \int_{-1}^{1} e^{0}\, dt = 2$$