Übung 10

S1) Lösen Sie die Differentialgleichungen durch Variation der Konstanten.

$$a)\; y' + xy = 4x \qquad b)\; y' + \frac{y}{1+x} = \mathrm{e}^{2x} \qquad c)\; y' \cdot \cos(x) = 1 + y \cdot \sin(x)$$

Lösung:

a) Es handelt sich um eine lineare inhomogene Differenzialgleichung. Die zugehörige homogene Differenzialgleichung lautet:

$$\begin{aligned} y' + xy &= 0 \\ \int \frac{1}{y} dy &= -\int x dx \\ \ln|y| &= -\frac{x^2}{2} + c_1 \\ y &= c\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \end{aligned}$$

Das ist die Lösung der homogenen Gleichung. Um die inhomogene Differenzialgleichung zu lösen, variieren wir nun die Konstante c, d.h. betrachten sie abhängig von x. Es gilt somit $y(x) = c(x) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$

Ableiten der Lösung und einsetzen in die DGL ergibt:

$$\begin{aligned} y' &= c'(x)\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} + c(x)\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (-x) \\ 4x &= c'(x)\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} + c(x)\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (-x) + x(c(x)\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}) \\ 4x &= c'(x)\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \\ c'(x) &= 4x \cdot \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} \end{aligned}$$

Integration liefert

$$c(x) = \int 4x \cdot \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\, dx = \int 4x\,\mathrm{e}^{u}\, \frac{du}{x} = 4 \int \mathrm{e}^{u}\, du = 4\,\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} + k \qquad , k \in \mathbb{R}$$

Die Lösung der allgemeinen inhomogenen Gleichung lautet

$$y(x) = (4\,\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} + k)\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = 4 + k\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

b) Es handelt sich um eine lineare inhomogene Differenzialgleichung. Die zugehörige homogene Differenzialgleichung lautet:

$$\begin{aligned} y' + \frac{y}{1+x} &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{y}{1+x} \\ \int \frac{1}{y} dy &= -\int \frac{1}{1+x} dx \\ \ln|y| &= -\ln|1+x| + c_1 \\ y &= \frac{c}{1+x} \qquad , c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Variation der Konstanten ($c \to c(x)$):

$$y' = \frac{c'(x)(1+x) - c(x)}{(1+x)^2}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{2x} &= \frac{c'(x)(1+x) - c(x)}{(1+x)^2} + \frac{\frac{c(x)}{1+x}}{1+x} = \frac{c'(x)(1+x)}{(1+x)^2} = \frac{c'(x)}{1+x} \\ c'(x) &= \mathrm{e}^{2x}(1+x) = \mathrm{e}^{2x} + x\,\mathrm{e}^{2x} \end{aligned}$$

Integration liefert:

$$\begin{aligned} c(x) &= \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} + \int x\,\mathrm{e}^{2x} = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} + \left(\frac{x\,\mathrm{e}^{2x}}{2} - \int \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} \cdot 1dx\right) \\ &= \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} + \frac{x\,\mathrm{e}^{2x}}{2} - \frac{\mathrm{e}^{2x}}{4} + k = \frac{x\,\mathrm{e}^{2x}}{2} + \frac{\mathrm{e}^{2x}}{4} + k \qquad , k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Für die allgemeine inhomogene Gleichung erhalten wir

$$y(x) = \frac{\frac{x\,\mathrm{e}^{2x}}{2} + \frac{\mathrm{e}^{2x}}{4} + k}{1+x}$$

c) Es handelt sich um eine lineare inhomogene Differenzialgleichung. Die zugehörige homogene Differenzialgleichung lautet:

$$\begin{aligned} y' \cdot \cos(x) &= y \cdot \sin(x) \qquad / : \cos(x) \\ \frac{dy}{dx} &= y \tan(x) \\ \int \frac{1}{y} dy &= \int \tan(x) dx \\ \ln|y| &= -\ln|\cos(x)| + c_1 \\ y &= \frac{c}{\cos(x)} \end{aligned}$$

Variation der Konstanten:

$$y' = \frac{c'(x)\cos(x) + c(x)\sin(x)}{\cos^2(x)}$$

$$\begin{aligned} \frac{c'(x)\cos(x) + c(x)\sin(x)}{\cos^2(x)} \cdot \cos(x) &= 1 + \frac{c(x)\sin(x)}{\cos(x)} \\ c'(x) + c(x)\tan(x) &= 1 + c(x)\tan(x) \\ c'(x) &= 1 \\ c(x) &= x + k \qquad , k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung lautet

$$y(x) = \frac{x+k}{\cos(x)}$$

S2) Ein Stromkreis mit einem zeitabhängigen Widerstand wird durch die DGL

$$\frac{dI(t)}{dt} + 2\sin(t)\cdot I(t) = \sin(2t) \qquad ,(t \geq 0)$$

beschrieben. Ermitteln Sie den zeitlichen Verlauf der Stromstärke $I(t)$ für $I(0) = 0$.

Lösung: Es handelt sich um eine lineare inhomogene Differenzialgleichung. Wir lösen wieder zuerst die homogene- und anschließend, durch Variation der Konstanten, die inhomogene DGL.

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} + 2\sin(t)I &= 0 \\ \int \frac{1}{I}dI &= -2\int \sin(t)dt \\ \ln|I| &= 2\cos(t) + c_1 \\ I &= c\,\mathrm{e}^{2\cos(t)} \end{aligned}$$

Wir setzen wieder $c = c(t)$:

$$I' = c'(x)\,\mathrm{e}^{2\cos(t)} - 2\sin(t)c(x)\,\mathrm{e}^{2\cos(t)}$$

Einsetzen in die ursprüngliche DGL:

$$\begin{aligned} c'(t)\,\mathrm{e}^{2\cos(t)} - 2\sin(t)c(x)\,\mathrm{e}^{2\cos(t)} + 2\sin(t)c(x)\,\mathrm{e}^{2\cos(t)} &= \sin(2t) \\ c'(t)\,\mathrm{e}^{2\cos(t)} &= \sin(2t) \\ c'(t) &= \mathrm{e}^{-2\cos(t)}\sin(2t) = \mathrm{e}^{-2\cos(t)} \cdot 2\cos(t)\sin(t) \end{aligned}$$

Wir integrieren mit der Substitution $u = -2\cos(t)$.

$$\begin{aligned} c(t) &= \int \mathrm{e}^{u} \cdot (-u\sin(t))\frac{du}{2\sin(t)} = -\frac{1}{2}\int u\,\mathrm{e}^{u}\,du \\ c(t) &= -\frac{1}{2}\left(u\,\mathrm{e}^{u} - \int \mathrm{e}^{u}\,du\right) = -\frac{1}{2}\left(u\,\mathrm{e}^{u} - \mathrm{e}^{u}\right) + k \\ c(t) &= \frac{\mathrm{e}^{-2\cos(t)}}{2}\left(2\cos(t) + 1\right) + k \end{aligned}$$

Wir erhalten als allgemeine Lösung

$$I(t) = \left(\frac{\mathrm{e}^{-2\cos(t)}}{2}\left(2\cos(t)+1\right) + k\right)\mathrm{e}^{2\cos(t)} = \frac{2\cos(t)+1}{2} + k\,\mathrm{e}^{2\cos(t)}$$

Einsetzen der Anfangsbedingung $I(0) = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{3}{2} + k\,\mathrm{e}^{2} \\ k &= -\frac{3}{2\,\mathrm{e}^{2}} \end{aligned}$$

Die spezielle Lösung lautet

$$I(t) = \frac{2\cos(t) + 1 - 3\,\mathrm{e}^{2\cos(t)-2}}{2}$$

S3) Bei einem Flugzeugabsturz im Meer konnte aus den bekannten Meeresströmungen ein entsprechendes Strömungsfeld berechnet werden.

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} -\frac{x}{2} \\ y \end{pmatrix}$$

Der vermutliche Aufprall auf die Wasseroberfläche liegt bei den Koordinaten $P(10;1)$.
Bestimmen Sie die Ortskurve $\vec{r}(t)$, $t \in [0;3]$ jenes Weges, auf dem das Wrack wahrscheinlich durch die Strömung abgetrieben wurde. Somit erhält man einen ersten Anhaltspunkt, wo die Suche nach Überresten am sinnvollsten ist.

Lösung: Die Lösungskurve $\vec{r}(t)$ liegt tangential zu allen Richtungsvektoren des Feldes. Der Tangentialvektor $\dot{\vec{r}}(t)$ stimmt somit mit den Feldvektoren überein. Daraus erhalten wir die Differenzialgleichung

$$\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{x}{2} \\ y \end{pmatrix}$$

Daraus ergeben sich die beiden Differenzialgleichungen

$$\dot{x}(t) = -\frac{x}{2}$$
$$\dot{y}(t) = y$$

Diese Gleichungen lösen wir jetzt.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\frac{x}{2} \\ -2\int \frac{1}{x}dx &= \int dt \\ -2\ln|x| &= t + c_1 \\ x(t) &= k_1 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} \qquad , k_1 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= y \\ \ln|y| &= t + c_2 \\ y(t) &= k_2 \cdot \mathrm{e}^{t} \qquad , k_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Aus den Anfangsbedingungen erhalten wir Werte für die noch unbestimmten Konstanten.

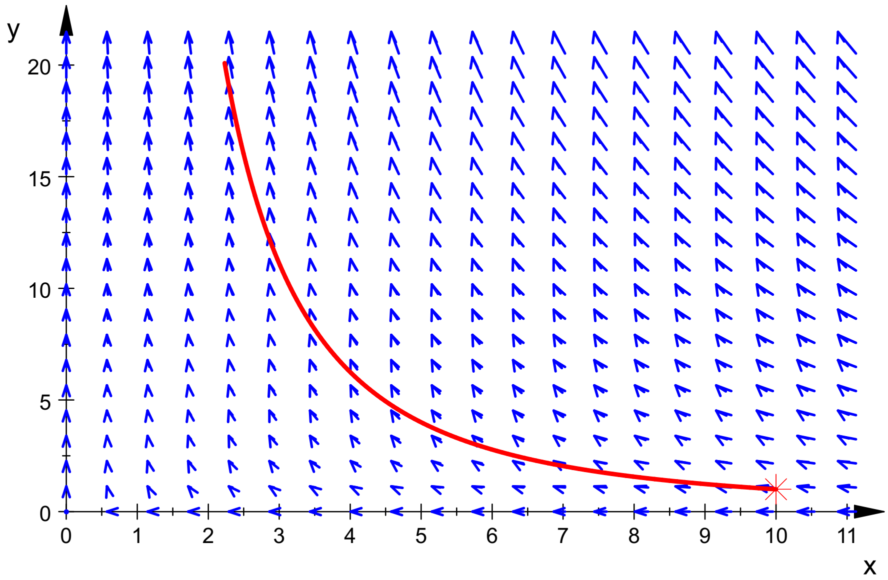
$$\begin{aligned} x(t) &= k_1 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} \\ x(0) &= 10 = k_1 \cdot \mathrm{e}^0 = k_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= k_2 \cdot \mathrm{e}^{t} \\ y(0) &= 1 = k_2 \cdot \mathrm{e}^0 = k_2 \end{aligned}$$

Insgesamt kann die Ortskurve $\vec{r}(t)$ angegeben werden mit

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} \\ \mathrm{e}^{t} \end{pmatrix} \qquad , t \in [0;3]$$

Zeichnen wir das Strömungsfeld und die Lösungskurve in eine Grafik, so sehen wir die Plausibilität unserer Rechnung bestätigt.



S4) Für eine stetig differenzierbare Funktion f definieren wir den Differenzialoperator D durch die Gleichung

$$D\colon f \mapsto 3f'$$

a) Zeigen Sie, dass D ein linearer Operator (Abbildung) ist.

b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren dieser linearen Abbildung.[1]

Lösung:

a)

$$\begin{aligned} D(\lambda f) &= 3(\lambda f)' = 3\lambda f' = \lambda \cdot 3f' = \lambda D(f) \\ D(f+g) &= 3(f+g)' = 3f' + 3g' = D(f) + D(g) \end{aligned}$$

b) Wir verwenden die Eigenwertgleichung:

$$\begin{aligned} D(f) &= \lambda f \\ 3f' &= \lambda f \end{aligned}$$

Diese DGL lösen wir wie üblich:

$$\begin{aligned} 3\frac{df}{dx} &= \lambda f \\ 3\int \frac{1}{f} df &= \lambda \int dx \\ 3\ln|f| &= \lambda x + c_1 \\ |f| &= \mathrm{e}^{\frac{\lambda}{3}x} \cdot c_2 \\ f(x) &= \mathrm{e}^{\frac{\lambda}{3}x} \cdot c \qquad (c \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Alle $\lambda \in \mathbb{R}$ sind Eigenwerte des Operators D mit zugehörigen Eigenfunktionen $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{\lambda}{3}x} \cdot c$.

[1] Hier spricht man oft von Eigenfunktionen statt von Eigenvektoren.

R1) Der *Laplace-Operator* Δ kann durch die Gleichung

$$\Delta(f) := div(grad(f))$$

für ein differenzierbares Skalarfeld f definiert werden.

a) Stellen Sie den Operator Δ durch den Nabla-Operator ∇ dar.

b) Zeigen Sie die Linearität des Laplace-Operators.

c) Zeigen Sie durch Nachrechnen der Definition, dass die Funktionen $f(x;y) = \mathrm{e}^{k\cdot(x+y)}, k \in \mathbb{R}$ Eigenfunktionen des Laplace-Operators sind. Bestimmen Sie die zugehörigen Eigenwerte.

Lösung:

a)

$$\Delta(f) := div(grad(f)) = div(\nabla \cdot f) = (\nabla \underbrace{\cdot}_{SKP} \nabla) \cdot f = \nabla^2 f$$

b)

$$\Delta(\lambda f) = \nabla^2(\lambda f) = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\right)(\lambda f) = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\lambda f\right) = \lambda\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} f\right) = \lambda \cdot \nabla^2 f = \lambda\Delta(f)$$

$$\Delta(f+g) = \nabla^2(f+g) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}(f+g) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} f + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} g = \nabla^2 f + \nabla^2 g = \Delta(f) + \Delta(g)$$

c)

$$\begin{aligned}\Delta(f) &= \Delta\left(\mathrm{e}^{k\cdot(x+y)}\right) = \nabla^2\left(\mathrm{e}^{k\cdot(x+y)}\right) = \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\,\mathrm{e}^{k\cdot(x+y)} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\mathrm{e}^{k\cdot(x+y)} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\,\mathrm{e}^{k\cdot(x+y)} \\ &= k^2\,\mathrm{e}^{k\cdot(x+y)} + k^2\,\mathrm{e}^{k\cdot(x+y)} = 2k^2\,\mathrm{e}^{k\cdot(x+y)}\end{aligned}$$

Die Eigenwertgleichung lautet somit

$$\begin{aligned}\Delta(f) &= \lambda f \\ 2k^2\,\mathrm{e}^{k\cdot(x+y)} &= \lambda\,\mathrm{e}^{k\cdot(x+y)} \\ &\Longrightarrow \lambda = 2k^2\end{aligned}$$

Jede Funktion der Form $\mathrm{e}^{k\cdot(x+y)}$ ist Eigenfunktion zum Eigenwert $\lambda = 2k^2$.