



Mathematik 2 - Vorlesung

HAT am 08.06.2018

Lösung

Name: _____

Matrikelnummer: _____

Studiengang: _____

Beachten Sie bitte folgende Punkte:

- Die Prüfungsdauer beträgt 90 Minuten.
- Schreiben Sie nicht mit Bleistift oder roter Farbe.
- Skizzen können mit Bleistift angefertigt werden.
- Geben Sie *alle* Rechenschritte ausführlich an.
- Streichen Sie ungültige Lösungen durch. Es darf pro Beispiel nur eine Ausarbeitung angegeben werden, die dann auch bewertet wird.
- Sie dürfen einen einfachen, nicht programmierbaren Taschenrechner verwenden.
- Weitere Hilfsmittel wie Formelsammlung, Skriptum etc. sind nicht gestattet.

Aufgabe Nummer	1	2	3	4	5	Gesamt
Punktzahl	10	10	10	15	15	60
Davon erreicht						

1 Aufgabe

[10 Punkte]

a) Vereinfachen Sie den Ausdruck

$$(3 + 4i)^2 + \frac{|1 + \sqrt{3} \cdot i|}{i}$$

und stellen Sie das Ergebnis in kartesischer Form dar.

b) Skizzieren Sie die Punktmenge

$$\{z \in \mathbb{C} : z \cdot \bar{z} + 3 = 2|z - \bar{z}| \wedge \text{Im}(z) > 0\}$$

Lösung:

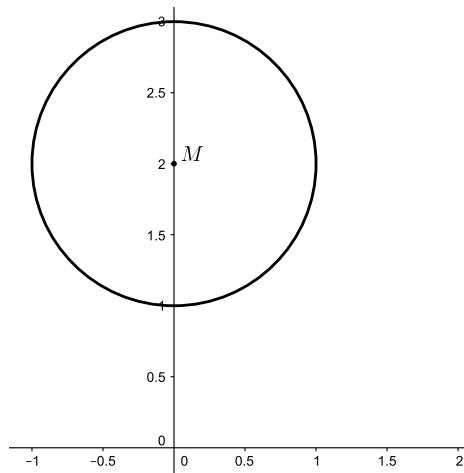
a)

$$(3 + 4i)^2 + \frac{|1 + \sqrt{3} \cdot i|}{i} = 9 + 24i - 16 + \frac{2}{i} = -7 + 22i$$

b)

$$\begin{aligned} z \cdot \bar{z} + 3 &= 2|z - \bar{z}| \\ x^2 + y^2 + 3 &= 2|x + iy - (x - iy)| \\ x^2 + y^2 + 3 &= 2|2iy| = 4y \\ x^2 + y^2 - 4y + 3 &= 0 \\ (x - 0)^2 + (y - 2)^2 - 4 + 3 &= 0 \\ (x - 0)^2 + (y - 2)^2 &= 1 \end{aligned}$$

Es handelt sich um einen Kreis mit $r = 1$ und $M(0; 2)$, wobei die Bedingung $y = \text{Im}(z) > 0$ nie gebraucht wird.





2 Aufgabe

[10 Punkte]

Bestimmen Sie die relativen Extremstellen der Funktion

$$f(x; y) = 3xy - x^3 - y^3$$

Geben Sie auch die Art der Extremstellen durch Auswertung der Diskriminante

$$\Delta = f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2$$

an.

Lösung:

$$f_x = 3y - 3x^2$$

$$f_{xx} = -6x$$

$$f_{xy} = 3$$

$$f_y = 3x - 3y^2$$

$$f_{yy} = -6y$$

$$f_{yx} = 3$$

Notwendige Bedingungen:

$$f_x = 0 = 3y - 3x^2 \implies y = x^2$$

$$f_y = 0 = 3x - 3y^2$$

$$0 = 3x - 3x^4$$

$$0 = x(1 - x^3)$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 1$$

$$x_{3,4} \in \mathbb{C}$$

Zu prüfende Punkte sind $P(0;0)$ und $Q(1;1)$.

Hinreichende Bedingungen:

$$\Delta|_P = 0 \cdot 0 - 9 = -9 < 0 \implies \text{Sattelpunkt}$$

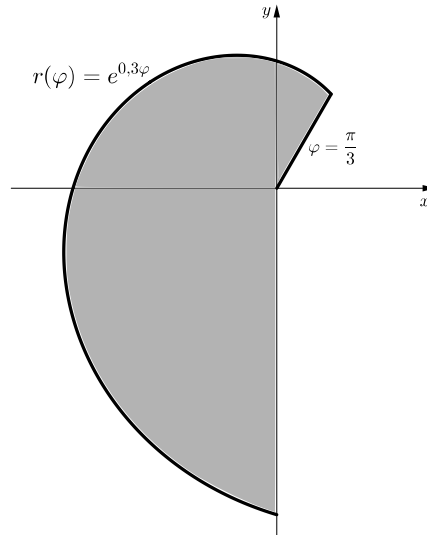
$$\Delta|_Q = -6 \cdot (-6) - 9 = 27 > 0 \implies \text{rel. Extremum}$$

$$f_{xx}|_Q = -6 \cdot (1) = -6 < 0 \implies \text{Maximum}$$

3 Aufgabe

[10 Punkte]

Berechnen Sie den grau dargestellten Flächeninhalt durch ein geeignetes Doppelintegral.



Lösung:

$$\begin{aligned} \int_{\varphi=\frac{\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{2}} \int_{r=0}^{e^{0,3\varphi}} 1 r dr d\varphi &= \int_{\varphi=\frac{\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{2}} \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^{e^{0,3\varphi}} d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\varphi=\frac{\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{2}} (e^{0,6\varphi} - 0) d\varphi \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{0,6} e^{0,6\varphi} \right]_{\varphi=\frac{\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{2}} = \frac{1}{1,2} (e^{0,9\pi} - e^{0,2\pi}) \approx 12,523 \end{aligned}$$



4 Aufgabe

[15 Punkte]

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 3y^2 - 1 \\ 6xy + 2y \end{pmatrix}$$

- a) Zeigen Sie, dass es sich um ein konservatives Kraftfeld handelt.
b) Berechnen Sie das Kurvenintegral entlang des Weges

$$c: \vec{r} = \begin{pmatrix} 3t \\ t^2 \end{pmatrix}, t \in [0; 2]$$

- c) Berechnen Sie die *Divergenz* von \vec{F} . An welchen Punkten ist das Feld quellenfrei?

Lösung:

a)

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_x}{\partial y} &= 6y \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} &= 6y \end{aligned}$$

Damit ist das Feld konservativ.

b)

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 2t \end{pmatrix} \\ I &= \int_0^2 \begin{pmatrix} 3(t^2)^2 - 1 \\ 18t^3 + 2t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2t \end{pmatrix} dt = \int_0^2 (9t^4 - 3 + 36t^4 + 4t^3) dt \\ &= \int_0^2 (45t^4 + 4t^3 - 3) dt = [9t^5 + t^4 - 3t]_0^2 = 298 \end{aligned}$$

Alternativ könnte auch ein Potential berechnet und dieses an den Endpunkten des Weges ausgewertet werden.

c)

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = 0 + 6x + 2$$

$$\begin{aligned} 6x + 2 &= 0 \\ x &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Auf der Geraden $x = -\frac{1}{3}$ ist das Feld quellenfrei.



5 Aufgabe

[15 Punkte]

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y' - xy + x = 0$$

durch Variation der Konstanten.

Lösung: Zuerst wird die homogene Gleichung gelöst.

$$\begin{aligned}y' - xy &= 0 \\ \frac{1}{y} dy &= x dx \\ \int \frac{1}{y} dy &= \int x dx \\ \ln |y| &= \frac{x^2}{2} + c_1 \\ y &= e^{\frac{x^2}{2}} \cdot c, \quad c \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Variation der Konstanten:

$$\begin{aligned}y_p &= e^{\frac{x^2}{2}} \cdot c(x) \\ y'_p &= x e^{\frac{x^2}{2}} \cdot c(x) + e^{\frac{x^2}{2}} \cdot c'(x) \\ 0 &= x e^{\frac{x^2}{2}} \cdot c(x) + e^{\frac{x^2}{2}} \cdot c'(x) - x e^{\frac{x^2}{2}} \cdot c(x) + x \\ 0 &= e^{\frac{x^2}{2}} \cdot c'(x) + x \\ c'(x) &= -x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \\ c(x) &= - \int x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx \stackrel{u=-\frac{x^2}{2}}{=} \int e^u du = e^u + k = e^{-\frac{x^2}{2}} + k, \quad k \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung lautet

$$y(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \cdot (e^{-\frac{x^2}{2}} + k) = 1 + k e^{\frac{x^2}{2}}$$



Zusatzblatt