Übung 6

S1) Beschreiben Sie die angegebenen Kurven durch *parameterabhängige* Ortsvektoren und bestimmen Sie den Tangentenvektor.

a) Parabel $y = 4x^2$, $x \geq 0$.

b) Kreis mit Mittelpunkt $M(2; 4)$ und $r = 2$ aber negativer Umlaufsinn.

c) Gerade mit Steigung $k = -3$.

Lösung:

a)

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \begin{pmatrix} t \\ 4t^2 \end{pmatrix} \\ \dot{\vec{r}} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 8t \end{pmatrix} \qquad , t \geq 0 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ -2\sin(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 2\cos(t) \\ 4 - 2\sin(t) \end{pmatrix} \\ \dot{\vec{r}} &= \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ -2\cos(t) \end{pmatrix} \qquad , t \in [0; 2\pi) \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \begin{pmatrix} t \\ -3t + d \end{pmatrix} \\ \dot{\vec{r}} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad , t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

S2) Auf einem Oszilloskop beobachten Sie die Bahn des Elektronenstrahls mit

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a \cdot \cos(\omega t) \\ b \cdot \sin(\omega t) \end{pmatrix} \qquad (t \geq 0)$$

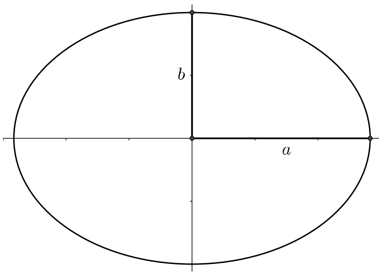
a) Skizzieren Sie die Bahnkurve. Welche Bedeutung haben die Konstanten a, b und ω?

b) Berechnen Sie den *Geschwindigkeits-* und *Beschleunigungsvektor*.

c) Zeigen Sie, dass der Beschleunigungsvektor stets dem Ortsvektor entgegengerichtet ist.

Lösung:

a) Es handelt sich bei a um die große-, bei b um die kleine Halbachse einer Ellipse. Der Parameter ω hat nichts mit der Form der Kurve zu tun, er entspricht der Kreisfrequenz. Sie beeinflusst, wie schnell die Kurve durchlaufen wird.



b)

$$\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} -a\omega\sin(\omega t) \\ b\omega\cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} -a\omega^2\cos(\omega t) \\ -b\omega^2\sin(\omega t) \end{pmatrix} \qquad (t \geq 0)$$

Hier ist einfach zu sehen, dass ein größerer Wert von ω einen längeren Geschwindigkeitsvektor (und Beschleunigungsvektor) zur Folge hat.

c)

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a\cos(\omega t) \\ b\sin(\omega t) \end{pmatrix} = -\frac{1}{\omega^2}\begin{pmatrix} -a\omega^2\cos(\omega t) \\ -b\omega^2\sin(\omega t) \end{pmatrix} = -\frac{1}{\omega^2}\ddot{\vec{r}}(t)$$

Damit haben $\vec{r}(t)$ und $\ddot{\vec{r}}(t)$ entgegengesetzte Orientierung.

S3) Gegeben sei die Raumkurve

$$\vec{r}(t) = 2\cos(5t)\cdot\vec{e}_x + 2\sin(5t)\cdot\vec{e}_y + 10t\cdot\vec{e}_z$$

Bestimmen Sie den *Tangenten-* und *Hauptnormaleneinheitsvektor* sowie die *Krümmung* der Kurve für $t = \frac{\pi}{4}$.

Lösung:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 2\cos(5t) \\ 2\sin(5t) \\ 10t \end{pmatrix} \qquad \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} -10\sin(5t) \\ 10\cos(5t) \\ 10 \end{pmatrix} \qquad \ddot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} -50\cos(5t) \\ -50\sin(5t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{T} = \frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|} = \frac{1}{10\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -10\sin(5t) \\ 10\cos(5t) \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -\sin(5t) \\ \cos(5t) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{T}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) \\ \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\vec{N} = \frac{\dot{\vec{T}}}{|\dot{\vec{T}}|} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -5\cos(5t) \\ -5\sin(5t) \\ 0 \end{pmatrix}}{\frac{5}{\sqrt{2}}} = \begin{pmatrix} -\cos(5t) \\ -\sin(5t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{N}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\kappa = \frac{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|^3} = \frac{1}{\left(10\sqrt{2}\right)^3} \left| \begin{pmatrix} 500\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) \\ -500\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) \\ 500 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2000\sqrt{2}} \cdot 500\sqrt{2} = \frac{1}{4}$$

S4) Bestimmen Sie die Richtungsableitung[1] von $f(x;y;z) = 2x^2y + z^2$ im Punkt $(1;0;1)$ in Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Lösung: Die Funktion f ist als Polynomfunktion sicher total differenzierbar, somit können wir die einfache Formel $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = grad(f) \cdot \vec{v}_0$ verwenden.

$$grad(f) \cdot \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 4xy \\ 2x^2 \\ 2z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(4xy - 2z)$$

$$\frac{\partial f(1;0;1)}{\partial \vec{v}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0-2) = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

S5) Gegeben sei das Skalarfeld $f(x;y) = x - y^2$.
Bestimmen Sie

a) den maximalen Anstieg von f im Punkt $P(3;-1)$ sowie die Richtung des Anstiegs.

b) die Gleichung der Tangente an die Niveaulinie durch P.

Lösung:

a)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2y \end{pmatrix}_P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{5}$$

b) Die Tangente an die Niveaulinie steht normal auf den Gradienten. Damit erhalten wir sofort

$$\text{Tangente: } \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

S6) Es sei $f(x;y;z) = 4x^2 + y^2 + z^2$ gegeben. Bestimmen Sie

a) die Niveaufläche durch den Punkt $P(2;2;2)$.

b) die Flächennormale auf die Niveaufläche durch P.

c) die Tangentialebene an die Niveaufläche durch P.

Lösung:

[1] Falls sie nicht auf die Definition zurückgreifen, begründen Sie die Anwendbarkeit ihrer Methode!

a)

$$\begin{aligned} f(2;2;2) &= 16+4+4 = 24 \\ 24 &= 4x^2+y^2+z^2 \\ 0 &= 4x^2+y^2+z^2-24 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 8x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}_P = \begin{pmatrix} 16 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 16 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) &= 0 \\ \begin{pmatrix} 16 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2-x \\ 2-y \\ 2-z \end{pmatrix} &= 0 \\ 32-16x+8-4y+8-4z &= 0 \\ 8-4x+2-y+2-z &= 0 \\ 12-4x-y-z &= 0 \end{aligned}$$

S7) Eine Metallfeder kann durch die Parametrisierung

$$C:\ \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 4\cos(t) \\ 4\sin(t) \\ 3t \end{pmatrix} \qquad , t \in [0; 4\pi]$$

beschrieben werden. Die Dichte der Feder sei gegeben durch die Funktion $\rho(x;y;z) = k \cdot (1+2z)$ mit $k \in \mathbb{R}_{>0}$.
Berechnen Sie die Masse des Objekts durch ein geeignetes Kurvenintegral.

Lösung:

$$\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} -4\sin(t) \\ 4\cos(t) \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} m &= \int_C \rho \, ds = \int_0^{4\pi} k(1+2(3t)) \cdot \sqrt{16+9}\, dt = 5k \int_0^{4\pi} (1+6t) dt \\ &= 5k \left[t+3t^2 \right]_0^{4\pi} = 5k(4\pi + 48\pi^2) = 20k\pi(1+12\pi) \end{aligned}$$

R1) Gegeben sei die vektorwertige Funktion

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2\sin(t) \\ \sqrt{3}\cos(t) - \sin(t) \\ -\sin(t) - \sqrt{3}\cos(t) \end{pmatrix} \qquad , t \in [0; 2\pi]$$

a) Weisen Sie nach, dass es sich um eine geschlossene Kurve handelt, die vollständig auf der Kugelsphäre $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ liegt.

b) Zeigen Sie, dass alle Punkte der Kurve auf einer Ebene liegen und bestimmen Sie die Parameterdarstellung dieser Ebene!

c) Um welche Art von Kurve handelt es sich?

Lösung:

a) Wir setzen direkt ein und prüfen die Gleichung auf Richtigkeit.

$$\begin{aligned}
(2\sin(t))^2 + (\sqrt{3}\cos(t) - \sin(t))^2 + (-\sin(t) - \sqrt{3}\cos(t))^2 &= 6 \\
4\sin^2(t) + 3\cos^2(t) - 2\sqrt{3}\cos(t)\sin(t) + \sin^2(t) + \sin^2(t) + 2\sqrt{3}\sin(t)\cos(t) + 3\cos^2(t) &= 6 \\
6\sin^2(t) + 6\cos^2(t) &= 6 \\
6 &= 6
\end{aligned}$$

Damit liegen alle Punkte sicher auf der Kugelsphäre. Die Geschlossenheit der Kurve liegt an der Periodizität der Winkelfunktionen. Wir erhalten für $t = 0$ und $t = 2\pi$ die gleichen Punkte, denn

$$\begin{pmatrix} 2\sin(0) \\ \sqrt{3}\cos(0) - \sin(0) \\ -\sin(0) - \sqrt{3}\cos(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2\sin(2\pi) \\ \sqrt{3}\cos(2\pi) - \sin(2\pi) \\ -\sin(2\pi) - \sqrt{3}\cos(2\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

b) Wir sollen nachweisen, dass alle Punkte auf einer Ebene liegen. Am einfachsten wäre es, wenn dies eine Ursprungsebene ist, daher versuchen wir diesen Weg zuerst. Dazu wählen wir zwei lin.unabhängige Ortsvektoren der Kurve und spannen damit die Ebene auf. Sollte das funktionieren, haben wir bereits eine Parameterdarstellung gewonnen.

$$t = 0 \colon \implies \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} = \sqrt{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$t = \frac{\pi}{2} \colon \implies \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Die Vektoren sind sicher linear unabhängig. Die Ebenengleichung lautet demnach

$$\varepsilon\colon\ \vec{x} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Wir prüfen jetzt nach, ob unsere Kurve auch wirklich in der Ebene liegt.

$$\begin{pmatrix} 2\sin(t) \\ \sqrt{3}\cos(t) - \sin(t) \\ -\sin(t) - \sqrt{3}\cos(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda_2 \\ \lambda_1 - \lambda_2 \\ -\lambda_1 - \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\sin(t) &= \lambda_2 \\
\sqrt{3}\cos(t) - \sin(t) &= \lambda_1 - \lambda_2 = \lambda_1 - \sin(t) \implies \sqrt{3}\cos(t) = \lambda_1 \\
-\sin(t) - \sqrt{3}\cos(t) &= -\lambda_1 - \lambda_2 = -\sqrt{3}\cos(t) - \sin(t) \\
0 &= 0
\end{aligned}$$

Damit liegen alle Kurvenpunkte tatsächlich in ε.

c) Da die (geschlossene) Kurve auf der Kugelsphäre und der Ebene liegt, muss es sich um einen Kreis handeln.