Übung 7

S1) Drücken Sie das in kartesischen Koordinaten $(x; y; z)$ gegebene Feld

$$\vec{F}(x; y; z) = \begin{pmatrix} \dfrac{y}{x} \\ z + xy \\ \dfrac{-x^2 - y^2}{(1+z)^2} \end{pmatrix}$$

in Zylinderkoordinaten $(r; \varphi; z)$ aus. Vereinfachen Sie so weit wie möglich!

S2) Bestimmen Sie die Divergenz des Gradienten der Funktion $\phi(x; y; z) = (x-1)^2 + (y-5)^2 + z^2$.

S3) Berechnen Sie den Gradienten von ϕ und anschließend seinen Betrag im Punkt P.

$$\phi(x; y; z) = 10x^2y^3 - 5xyz^2 \qquad P(1; -1; 2)$$

Welche Bedeutung haben der Gradient und seine Länge?

S4) Zeigen Sie die Wirbelfreiheit des Feldes

$$\vec{v} = \frac{-1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

S5) Bestimmen sie die Rotation von $\vec{F} = \begin{pmatrix} xy^3 \\ 2xy^2z \\ x^2y - z^2 \end{pmatrix}$ im Punkt $P(1; 2; 1)$.

S6) Wie sind die Parameter a und b zu wählen, damit die Rotation des Vektorfeldes

$$\vec{F}(x; y; z) = \begin{pmatrix} 2xz^2 + y^3z \\ axy^2z \\ 2x^2z + bxy^3 \end{pmatrix}$$

überall verschwindet?

S7) Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass $\vec{F}$ ein Gradientenfeld ist (ohne ein Potential ϕ konkret zu bestimmen!).

b) Bestimmen Sie ein zugehöriges *Potential* ϕ.

S8) Geben Sie bei den folgenden beiden Feldern an, wo sich Quellen und Senken befinden ($a \in \mathbb{R}$).

$$\vec{F}(x;y;z) = \begin{pmatrix} x-a \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \vec{G}(x;y;z) = \begin{pmatrix} a \\ -x \\ z^2 \end{pmatrix}$$

S9) Welche Werte muss $c \in \mathbb{R}$ annehmen, damit das Feld

$$\vec{F}(x;y;z) = \begin{pmatrix} -c \cdot x \\ 2c^3 \cdot y - c^2 \cdot y \\ \sqrt{c} \end{pmatrix}$$

quellenfrei wird?