Übung 2

S1) Skizzieren Sie jene Punktmenge, die durch die Ungleichungskette

$$3 < |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z) < 4\,\mathrm{Im}(z)$$

definiert wird.

Lösung: Die Ungleichungskette kann in zwei Ungleichungen zerlegt werden, die beide erfüllt sein müssen. Wir setzen $z = a + ib$.

$$\begin{aligned} 3 &< |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z) \\ |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z) &< 4\,\mathrm{Im}(z) \end{aligned}$$

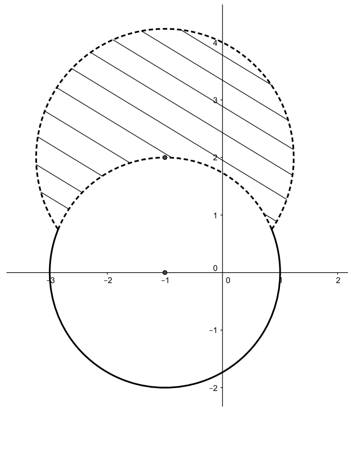
Wir formen beide Ungleichungen so weit um, bis wir erkennen welche Bereiche in der Ebene dargestellt sind.

$$\begin{aligned} 3 &< |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z) \\ 3 &< a^2 + b^2 + 2a \\ 3 &< (a+1)^2 - 1 + b^2 \\ 4 &< (a+1)^2 + b^2 \end{aligned}$$

Die Ungleichung beschreibt das Äußere eines Kreises mit Mittelpunkt $M(-1;0)$ und Radius $r = \sqrt{4} = 2$.

$$\begin{aligned} |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z) &< 4\,\mathrm{Im}(z) \\ a^2 + b^2 + 2a &< 4b \\ a^2 + 2a + b^2 - 4b &< 0 \\ (a+1)^2 - 1 + (b-2)^2 - 4 &< 0 \\ (a+1)^2 + (b-2)^2 &< 5 \end{aligned}$$

Diese Ungleichung beschreibt das Innere eines Kreises mit Mittelpunkt $M(-1;2)$ und Radius $r = \sqrt{5}$. Der Durchschnitt der beiden Mengen ist die gesuchte Lösungsmenge.



S2) Gegeben sind die beiden Wechselspannungen

$$u_1(t) = 100 \cdot \sin(\omega t) \qquad\qquad u_2(t) = 150 \cdot \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$

Bestimmen Sie die resultierende Wechselspannung der Überlagerung mit Hilfe der komplexen Rechnung.

Lösung:

$$\underline{u_1} = 100\,\mathrm{e}^{i\omega t} \qquad\qquad \underline{u_2} = 150\,\mathrm{e}^{i(\omega t + \frac{\pi}{4})}$$

$$\begin{aligned}\underline{u} = \underline{u_1} + \underline{u_2} &= 100\,\mathrm{e}^{i\omega t} + 150\,\mathrm{e}^{i(\omega t+\frac{\pi}{4})} = 100\,\mathrm{e}^{i\omega t} + 150\,\mathrm{e}^{i\omega t}\cdot \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}\\
&= \mathrm{e}^{i\omega t}\left(100 + 150\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}\right)\\
&= \mathrm{e}^{i\omega t}\left(100 + 150\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)\\
&= \mathrm{e}^{i\omega t}\left(100 + 150\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) \approx \mathrm{e}^{i\omega t}\,(206{,}07 + 106{,}07i)\end{aligned}$$

In Exponentialform lautet die letzte Gleichung

$$\underline{u} = \mathrm{e}^{i\omega t} \cdot 231{,}77\,\mathrm{e}^{i\cdot 0{,}4754} = 231{,}77\,\mathrm{e}^{i\cdot(\omega t + 0{,}4754)}$$

Die überlagerte Sinusschwingung erhalten wir durch Bildung des Imaginärteils.

$$u = \mathrm{Im}(\underline{u}) = 231{,}77 \cdot \sin(\omega t + 0{,}4754)$$

S3) Zeigen Sie, dass die Funktionen im Ursprung unstetig sind.

$$a)\ f(x;y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{x^5+y^5} & (x;y) \neq (0;0) \\ 0 & (x;y) = (0;0)\end{cases} \qquad b)\ f(x;y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{x^6+y^4} & (x;y) \neq (0;0) \\ 0 & (x;y) = (0;0)\end{cases}$$

Lösung: Um Unstetigkeit zu zeigen bietet es sich oft an einen Weg zu finden, auf dem die Funktion nicht gegen den definierten Funktionswert im Ursprung konvergiert.

a)

$$\lim_{(x;x)\to(0;0)} \frac{x^3x^2}{x^5+x^5} = \lim_{(x;x)\to(0;0)} \frac{x^5}{2x^5} = \lim_{(x;x)\to(0;0)} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 0$$

b)

$$\lim_{(x;\sqrt{x^3})\to(0;0)} \frac{x^3x^3}{x^6+x^6} = \lim_{(x;\sqrt{x^3})\to(0;0)} \frac{x^6}{2x^6} = \frac{1}{2} \neq 0$$

S4) Zeigen Sie die Stetigkeit der Funktion

$$f(x;y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} & (x;y) \neq (0;0) \\ 2 & (x;y) = (0;0)\end{cases}$$

Lösung: Als Zusammensetzung von stetigen Funktionen ist die gegebene Funktion wieder stetig. Wir versuchen den Weg über Polarkoordinaten um den kritischen Punkt $(0;0)$ zu untersuchen.

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^2}{\sqrt{r^2+1}-1}$$

Wir haben den Fall "$\frac{0}{0}$" vorliegen, können also die Regel von De L'Hospital verwenden[1].

$$\lim_{r\to 0} \frac{2r}{\frac{1}{2}(r^2+1)^{-\frac{1}{2}}2r} = \lim_{r\to 0}\left(2\sqrt{r^2+1}\right) = 2$$

S5) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen der Funktionen.

a) $f(x;y) = 2xy^2 + \mathrm{e}^{\sin(x)}$ *b)* $f(x;y) = \dfrac{x^2-y^2}{2x+y^2}$ *c)* $f(x;y) = \ln\left(\sqrt{x+2xy}\right)$

d) $f(r;\varphi) = \sin(ar+\varphi)$ *e)* $f(r;\varphi) = \sin(\varphi)\cos(\varphi+r)$ *f)* $f(x;y) = \sqrt{x^2-4xy^3}$

Lösung:

a)

$$f_x(x;y) = 2y^2 + \mathrm{e}^{\sin(x)}\cdot\cos(x) \qquad f_y(x;y) = 4xy$$

b)

$$f_x(x;y) = \frac{2x(2x+y^2)-(x^2-y^2)\cdot 2}{(2x+y^2)^2} = \frac{4x^2+2xy^2-2x^2+2y^2}{(2x+y^2)^2} = \frac{2x^2+2xy^2+2y^2}{(2x+y^2)^2}$$

$$f_y(x;y) = \frac{-2y(2x+y^2)-(x^2-y^2)2y}{(2x+y^2)^2} = \frac{-4xy-2y^3-2x^2y+2y^3}{(2x+y^2)^2} = \frac{-4xy-2x^2y}{(2x+y^2)^2}$$

c)

$$f_x(x;y) = \frac{1}{\sqrt{x+2xy}}\cdot\frac{1}{2}(x+2xy)^{-\frac{1}{2}}\cdot(1+2y) = \frac{(1+2y)}{2(x+2xy)} = \frac{1}{2x}$$

$$f_y(x;y) = \frac{1}{\sqrt{x+2xy}}\cdot\frac{1}{2}(x+2xy)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x = \frac{x}{x+2xy} = \frac{1}{1+2y}$$

d)

$$f_r(r;\varphi) = \cos(ar+\varphi)\cdot a \qquad f_\varphi(r;\varphi) = \cos(ar+\varphi)$$

e)

$$f_r(r;\varphi) = \sin(\varphi)\cdot(-\sin(\varphi+r))$$
$$f_\varphi(r;\varphi) = \cos(\varphi)\cos(\varphi+r)+\sin(\varphi)(-\sin(\varphi+r))$$

f)

$$f_x(x;y) = \frac{1}{2}(x^2-4xy^3)^{-\frac{1}{2}}\cdot(2x-4y^3) = \frac{2x-4y^3}{2\sqrt{x^2-4xy^3}} = \frac{x-2y^3}{\sqrt{x^2-4xy^3}}$$

$$f_y(x;y) = \frac{1}{2}(x^2-4xy^3)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-12xy^2) = \frac{-12xy^2}{2\sqrt{x^2-4xy^3}} = \frac{-6xy^2}{\sqrt{x^2-4xy^3}}$$

[1] Alternativ kann der Bruch auch mit $\sqrt{r^2+1}+1$ erweitert werden.

S6) Bestimmen Sie die Richtungsableitung in Richtung $\vec{v}$ mit Hilfe des Differenzialquotienten.

$$a)\ f(x;y) = x^2 + 3xy \quad ,\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad\qquad b)\ f(x;y) = xy^2 \quad ,\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

a)

$$\begin{aligned} f'_{\vec{v}}(\vec{x}) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(\vec{x}+h\vec{v}) - f(\vec{x})}{h|\vec{v}|} = \lim_{h\to 0} \frac{f\left(\begin{pmatrix} x+h \\ y-2h \end{pmatrix}\right) - f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)}{h\sqrt{5}} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 + 3(x+h)(y-2h) - x^2 - 3xy}{h\sqrt{5}} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 + 3xy - 6xh + 3hy - 6h^2 - x^2 - 3xy}{h\sqrt{5}} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-4xh - 5h^2 + 3hy}{h\sqrt{5}} = \lim_{h\to 0} \frac{-4x - 5h + 3y}{\sqrt{5}} = \frac{-4x+3y}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} f'_{\vec{v}}(\vec{x}) &= \lim_{h\to 0} \frac{f\left(\begin{pmatrix} x+h \\ y+h \end{pmatrix}\right) - f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)}{h\sqrt{2}} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)(y+h)^2 - xy^2}{h\sqrt{2}} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)(y^2 + 2hy + h^2) - xy^2}{h\sqrt{2}} = \lim_{h\to 0} \frac{xy^2 + 2hxy + xh^2 + hy^2 + 2h^2y + h^3 - xy^2}{h\sqrt{2}} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2xy + xh + y^2 + 2hy + h^2}{\sqrt{2}} = \frac{2xy+y^2}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$