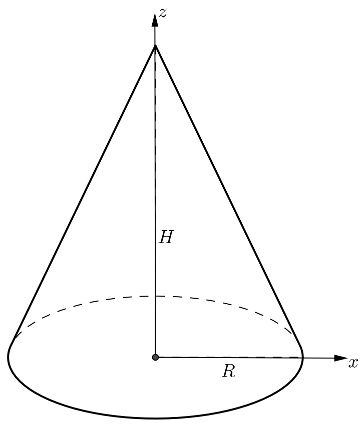
Übung 5

Unter Verwendung von *Zylinderkoordinaten* gilt für einen bzgl. der $z-$Achse rotationssymmetrischen Körper die Schwerpunktsformel

$$S = (0; 0; z_S) \qquad\qquad z_S = \frac{1}{V} \iiint\limits_V zr dz dr d\varphi$$

S1) Wo befindet sich der Schwerpunkt eines Drehkegels mit Radius R und Höhe H?

Lösung:

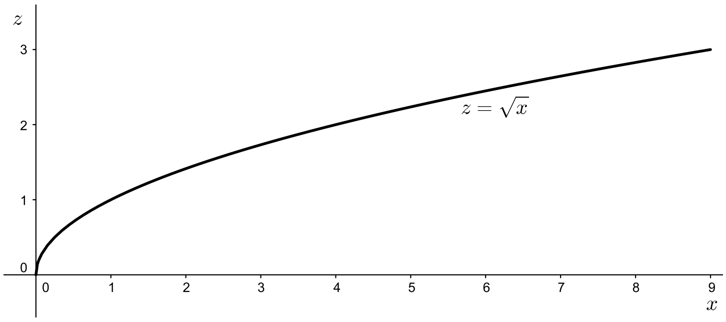


Das Volumen eines Drehkegels ist gegeben durch $V = \frac{R^2\pi H}{3}$, damit folgt

$$\begin{aligned}
z_S &= \frac{3}{R^2\pi H} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{R} \int\limits_{z=0}^{\frac{H(R-r)}{R}} zr dz dr d\varphi = \frac{3}{R^2\pi H} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{R} \left[r\frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{\frac{H(R-r)}{R}} dr d\varphi \\
&= \frac{3}{R^2\pi H} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{R} \frac{rH^2(R-r)^2}{2R^2} dr d\varphi = \frac{3H}{2R^4\pi} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{R} r(R-r)^2 dr d\varphi \\
&= \frac{3H}{2R^4\pi} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{R} (rR^2 - 2Rr^2 + r^3) dr d\varphi = \frac{3H}{2R^4\pi} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \left[\frac{R^2r^2}{2} - \frac{2Rr^3}{3} + \frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{R} d\varphi \\
&= \frac{3H}{2R^4\pi} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\frac{R^4}{2} - \frac{2R^4}{3} + \frac{R^4}{4} \right) d\varphi = \frac{3H}{2R^4\pi} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{R^4}{12} d\varphi = \frac{H}{8\pi} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \\
&= \frac{H}{8\pi} \left[\varphi\right]_0^{2\pi} = \frac{H2\pi}{8\pi} = \frac{H}{4} \\
S &= \left(0; 0; \frac{H}{4} \right)
\end{aligned}$$

S2) Die Kurve $z(x) = \sqrt{x}$ mit $0 \leq x \leq 9$ rotiert um die $z-$Achse. Berechnen Sie den Schwerpunkt dieses Trichters.

Lösung:



Zuerst müssen wir das Volumen berechnen. Die Höhe des Trichter ist 3 wie leicht aus einer Skizze zu erkennen ist.

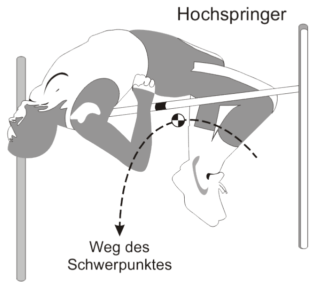
$$V = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{9} \int_{z=\sqrt{r}}^{3} r dz dr d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{9} [rz]_{z=\sqrt{r}}^{3} dr d\varphi$$
$$= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{9} (3r - r^{\frac{3}{2}}) dr d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left[\frac{3r^2}{2} - \frac{2r^{\frac{5}{2}}}{5}\right]_{r=0}^{9} d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} (121,5 - 97,2)\, d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} 24,3 d\varphi$$
$$= [24,3\varphi]_{\varphi=0}^{2\pi} = 48,6\pi$$

Jetzt berechnen wir den Schwerpunkt.

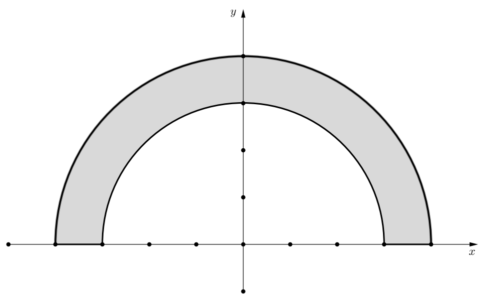
$$z_S = \frac{1}{48,6\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{9} \int_{z=\sqrt{r}}^{3} z r dz dr d\varphi = \frac{1}{48,6\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{9} \left[\frac{rz^2}{2}\right]_{z=\sqrt{r}}^{3} dr d\varphi$$
$$= \frac{1}{48,6\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{9} \left(\frac{9r}{2} - \frac{r^2}{2}\right) dr d\varphi = \frac{1}{97,2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left[\frac{9r^2}{2} - \frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{9} d\varphi$$
$$= \frac{1}{97,2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} 121,5 d\varphi = \frac{121,5}{97,2\pi} [\varphi]_{\varphi=0}^{2\pi} = 2,5$$

$$S = (0;0;2,5)$$

S3) Der amerikanische Leichtathlet *Dick Fosbury* revolutionierte den Hochsprung durch eine von ihm entwickelte Sprungtechnik, den *Fosbury-Flop*.



Wir modellieren die Haltung des Athleten in der Ebene durch den halben Kreisring $9 \leq x^2+y^2 \leq 16$ und der Bedingung $y \geq 0$. Der Kreisring soll eine homogene Massenverteilung aufweisen, auch wenn diese Annahme beim menschlichen Körper nicht ganz zutreffend ist.



Berechnen Sie den Schwerpunkt $S(x_S; y_S)$ des Kreisrings mit Hilfe des Integrals

$$x_S = \frac{1}{A} \iint\limits_A x dA \qquad\qquad y_S = \frac{1}{A} \iint\limits_A y dA$$

Lösung: Die Verwendung von Polarkoordinaten ist naheliegend und der Flächeninhalt kann aus der üblichen Formel für Kreise gewonnen werden.

$$A = \frac{4^2\pi - 3^2\pi}{2} = \frac{7\pi}{2}$$

Jetzt wird die $x-$Koordinate berechnet.

$$\begin{aligned}
x_S &= \frac{2}{7\pi} \int\limits_{\varphi=0}^{\pi} \int\limits_{r=3}^{4} r^2 \cos(\varphi) dr d\varphi = \frac{2}{7\pi} \int\limits_{\varphi=0}^{\pi} \left[\frac{r^3}{3} \cos(\varphi) \right]_{r=3}^{4} \\
&= \frac{2}{7\pi} \int\limits_{\varphi=0}^{\pi} \left(\frac{64}{3} \cos(\varphi) - 9\cos(\varphi) \right) d\varphi = \frac{2}{7\pi} \int\limits_{\varphi=0}^{\pi} \frac{37}{3} \cos(\varphi) d\varphi \\
&= \frac{74}{21\pi} \int\limits_{\varphi=0}^{\pi} \cos(\varphi) d\varphi = \frac{74}{21\pi} \left[\sin(\varphi) \right]_{\varphi=0}^{\pi} = \frac{74}{21\pi} (0-0) = 0
\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis war aufgrund der Symmetrie auch zu erwarten. Die $y-$Koordinate berechnen wir auch noch:

$$y_S = \frac{2}{7\pi} \int\limits_{\varphi=0}^{\pi} \int\limits_{r=3}^{4} r^2 \sin(\varphi) dr d\varphi = \frac{2}{7\pi} \int\limits_{\varphi=0}^{\pi} \left[\frac{r^3}{3} \sin(\varphi)\right]_{r=3}^{4}$$

$$= \frac{2}{7\pi} \int\limits_{\varphi=0}^{\pi} \left(\frac{64}{3} \sin(\varphi) - 9\sin(\varphi)\right) d\varphi = \frac{2}{7\pi} \int\limits_{\varphi=0}^{\pi} \frac{37}{3} \sin(\varphi) d\varphi$$

$$= \frac{74}{21\pi} \int\limits_{\varphi=0}^{\pi} \sin(\varphi) d\varphi = \frac{74}{21\pi} \left[-\cos(\varphi)\right]_{\varphi=0}^{\pi} = -\frac{74}{21\pi} (-1-(+1)) = \frac{148}{21\pi} \approx 2,24$$

Der Schwerpunkt liegt bei $S(0; 2,24)$ und damit **außerhalb** des Kreisrings.

S4) Bestimmen Sie das Flächendifferential dA bzw. das Volumsdifferential dV der gegebenen Koordinatentransformationen.

$a)\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u \\ 2v \end{pmatrix}$ $\qquad$ $b)\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^2\cos(u) \\ v^2\sin(u) \end{pmatrix}$ $\qquad$ $c)\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} uv \\ 2uv + w \\ u - w \end{pmatrix}$

$dA = ?$ $\qquad$ $dA = ?$ $\qquad$ $dV = ?$

Lösung:

a)

$$dA\colon \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 0 = 4 \quad \Longrightarrow dA = 4dudv$$

b)

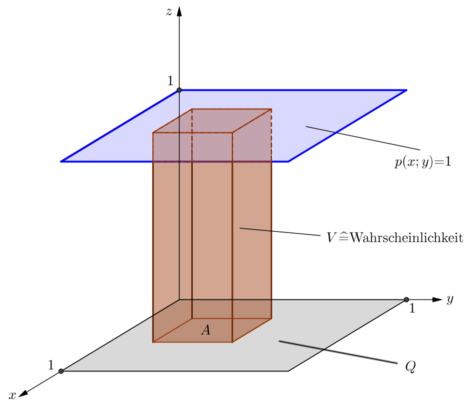
$$dA\colon \begin{vmatrix} 2v\cos(u) & -v^2\sin(u) \\ 2v\sin(u) & v^2\cos(u) \end{vmatrix} = 2v^3\cos^2(u) + 2v^3\sin^2(u) = 2v^3(\cos^2(u) + \sin^2(u)) = 2v^3$$

$$\Longrightarrow dA = |2v^3| dudv$$

c)

$$dV\colon \begin{vmatrix} v & u & 0 \\ 2v & 2u & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2uv + u + 0 - (0 + 0 - 2uv) = u \quad \Longrightarrow dV = |u| dudvdw$$

S5) Wir betrachten das Einheitsquadrat $Q = \{(x; y)\colon 0 \le x \le 1 \wedge 0 \le y \le 1\}$ und die konstante Funktion $p(x; y) = 1$, $\forall (x; y) \in Q$.
Interpretiert werden kann $p(x; y)$ als sogenannte *Wahrscheinlichkeitsdichte*, d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Punkt aus Q in einer Fläche $A \subseteq Q$ liegt, kann damit berechnet werden. Das eingeschlossene Volumen zwischen der Fläche $p(x; y)|_A$ und A entspricht genau dieser Wahrscheinlichkeit.



a) Wie groß ist das Volumen zwischen p und Q?

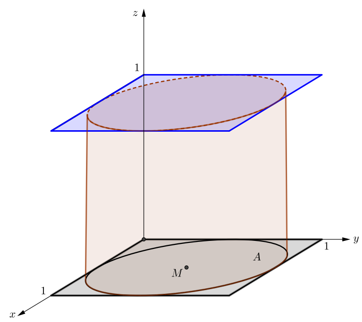
b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit *ohne* Integralrechnung, dass ein zufällig gewählter Punkt in der Fläche $A : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ liegt. Skizzieren Sie die Fläche A und jenes Volumen, das der Wahrscheinlichkeit entspricht.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig gewählter Punkt innerhalb des Rechtecks $R = \{(x; y) \colon 0,1 \leq x \leq 0,8 \wedge 0,2 \leq y \leq 0,6\}$ liegt mit Hilfe eines Dreifachintegrals.

Lösung:

a) Das Volumen ist zwischen den beiden Flächen Q und p ist exakt 1.

b) Die Fläche $A : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ ist ein Kreis mit $M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ und Radius $r = \frac{1}{2}$.



Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Punkt im Kreis A liegt, entspricht dem Zylindervolumen.

$$P(X \in A) = r^2 \pi h = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \pi \cdot 1 = \frac{\pi}{4} \approx 0,7854$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund $78,54\%$.

c)

$$P(X \in R) = \int\limits_{z=0}^{1} \int\limits_{x=0,1}^{0,8} \int\limits_{y=0,2}^{0,6} p(x;y) dy dx dz = \int\limits_{z=0}^{1} \int\limits_{x=0,1}^{0,8} \int\limits_{y=0,2}^{0,6} 1 dy dx dz = \int\limits_{z=0}^{1} \int\limits_{x=0,1}^{0,8} [y]_{y=0,2}^{0,6} \, dx dz$$

$$= \int\limits_{z=0}^{1} \int\limits_{x=0,1}^{0,8} 0,4 dx dz = \int\limits_{z=0}^{1} [0,4x]_{x=0,1}^{0,8} \, dz = \int\limits_{z=0}^{1} 0,28 \, dz = 0,28$$

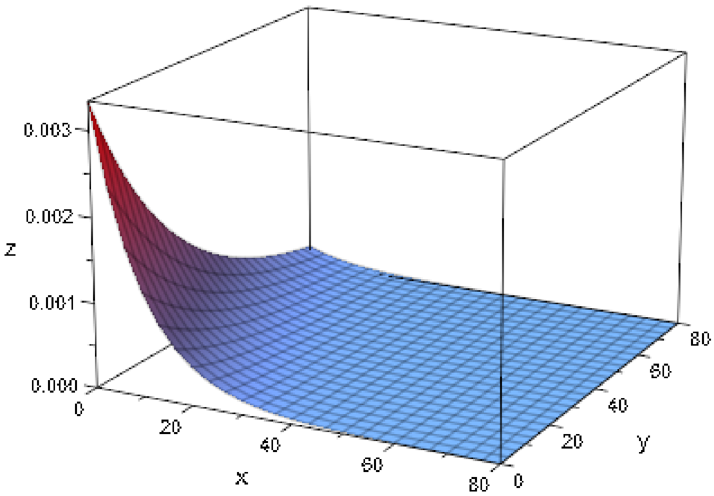
Die Wahrscheinlichkeit beträgt 28%. Natürlich hätte auch elementar das Volumen des entsprechenden Quaders berechnet werden können.

R1) In einem bestimmten Restaurant müssen Kunden durchschnittlich 10 Minuten auf einen freien Tisch warten. Die Zeitdauer von der Tischzuteilung bis zur Beendigung des Essens beträgt durchschnittlich weitere 30 Minuten.
Die Dichtefunktionen für diese beiden voneinander unabhängigen Wartezeiten können durch die folgenden Funktionen modelliert werden.

$$p_1(x) = 0,1\,\mathrm{e}^{-0,1x} \quad ,x \geq 0 \qquad\qquad p_2(y) = \frac{1}{30}\,\mathrm{e}^{-\frac{y}{30}} \quad ,y \geq 0$$

Da die beiden Wartezeiten voneinander unabhängig sind, kann die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte einfach durch das Produkt der Funktionen bestimmt werden.

$$p(x;y) = \frac{1}{300}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{10}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{y}{30}} \quad ,x \geq 0 \wedge y \geq 0$$



a) Zeigen Sie, dass das Volumen zwischen $p(x;y)$ und dem 1.Quadranten der $xy-$Ebene gleich 1 ist.

b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die *gesamte* Wartezeit höchstens eine Stunde beträgt?

Lösung:

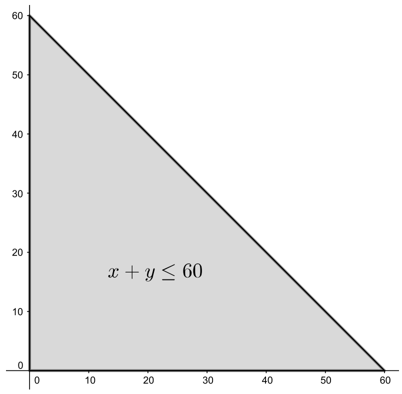
a) Wir lassen etwas schlampig die Limes-Notation weg und schreiben direkt ∞ in die oberen Grenzen.

$$\int_{y=0}^{\infty}\int_{x=0}^{\infty} \frac{1}{300}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{10}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{y}{30}}\,dxdy = \frac{1}{300}\int_{y=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{y}{30}}\,dy \int_{x=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x}{10}}\,dx$$

$$= \frac{1}{300}\left(\left[\mathrm{e}^{-\frac{y}{30}} \cdot (-30)\right]_0^{\infty} \cdot \left[\mathrm{e}^{-\frac{x}{10}} \cdot (-10)\right]_0^{\infty}\right)$$

$$= \frac{300}{300}\left((0-1)\cdot(0-1)\right) = 1 \cdot 1 = 1$$

b) Die Summe beider Wartezeiten soll maximal 60 Minuten sein, d.h. $x + y \leq 60$. In der $xy-$Ebene entspricht der Integrationsbereich daher einem Dreieck im ersten Quadranten.



$$P(X+Y \leq 60) = \int_{x=0}^{60} \int_{y=0}^{60-x} \frac{1}{300} \, \mathrm{e}^{-\frac{x}{10}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{y}{30}} \, dy dx = \frac{1}{300} \int_{x=0}^{60} \mathrm{e}^{-\frac{x}{10}} \left[\mathrm{e}^{-\frac{y}{30}} \cdot (-30) \right]_{y=0}^{60-x} dx$$

$$= -\frac{1}{10} \int_{x=0}^{60} \mathrm{e}^{-\frac{x}{10}} \left(\mathrm{e}^{-\frac{60-x}{30}} - 1 \right) dx = -\frac{1}{10} \int_{x=0}^{60} \left(\mathrm{e}^{-\frac{x+30}{15}} - \mathrm{e}^{-\frac{x}{10}} \right) dx$$

$$= -\frac{1}{10} \int_{x=0}^{60} \left(\mathrm{e}^{-\frac{x}{15}} \, \mathrm{e}^{-2} - \mathrm{e}^{-\frac{x}{10}} \right) dx = -\frac{1}{10} \left[\mathrm{e}^{-2} \, \mathrm{e}^{-\frac{x}{15}} (-15) + 10 \, \mathrm{e}^{-\frac{x}{10}} \right]_{x=0}^{60}$$

$$= -\frac{1}{10} \left(\mathrm{e}^{-2} \, \mathrm{e}^{-4} (-15) + 10 \, \mathrm{e}^{-6} - \left(-15 \, \mathrm{e}^{-2} + 10 \right) \right)$$

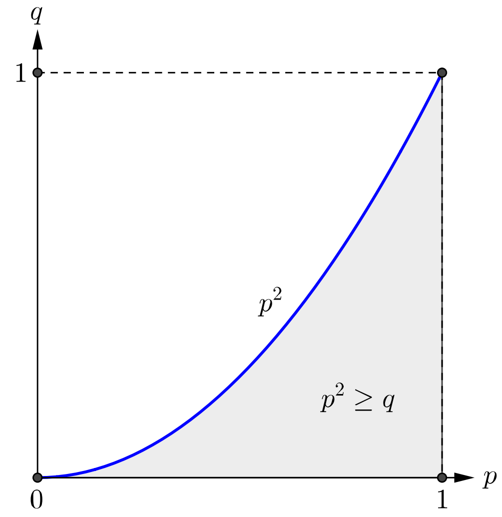
$$= -\frac{1}{10} \left(-5 \, \mathrm{e}^{-6} + 15 \, \mathrm{e}^{-2} - 10 \right) \approx 0,7982$$

Die Wahrscheinlichkeit insgesamt höchstens 60 Minuten zu warten beträgt ca. $79,82\%$.

R2) Aus dem Intervall $(0,1)$ werden zwei Zahlen p und q zufällig ausgewählt. Man betrachte die quadratische Gleichung $x^2 + 2px + q = 0$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind die Lösungen dieser Gleichung reell?

Lösung:

Damit die gegebene Gleichung nur reelle Lösungen hat muss der Ausdruck $\sqrt{\frac{4p^2}{4} - q} = \sqrt{p^2 - q}$ reell sein, d.h. $p^2 \geq q$ gelten. Da p und q beide aus $(0;1)$ stammen, kann diese Beziehung geometrisch wie folgt veranschaulicht werden.



Beide Koeffizienten werden zufällig ausgewählt, wir können somit die Dichtefunktion $f(p;q) = 1$ über dem Quadrat $(0;1) \times (0;1)$ annehmen. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist das Volumen über der gezeichneten Fläche unter $f(p;q)$.

$$P = \int\limits_{p=0}^{1} \int\limits_{q=0}^{p^2} 1 dq dp = \int\limits_{p=0}^{1} p^2 dp = \frac{p^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$