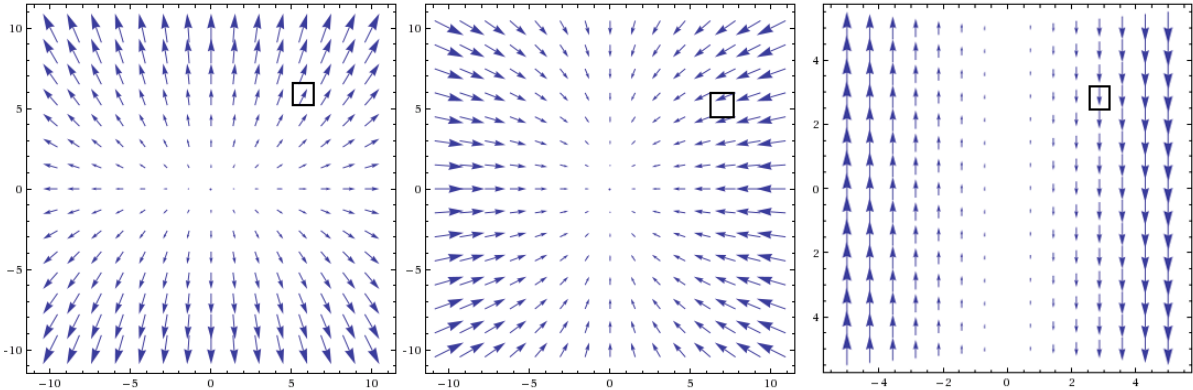
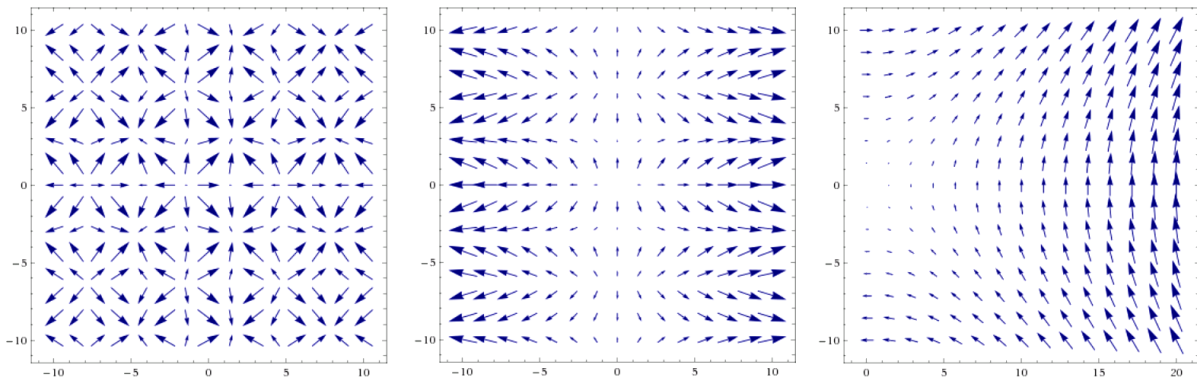


Übung 8

S1) Sie haben die drei abgebildeten Vektorfelder vorliegen. Bestimmen Sie rein anschaulich, ob die Divergenz im eingezeichneten schwarzen Kästchen positiv, negativ, oder gleich Null ist.



S2) Versuchen Sie zu bestimmen, welches der Felder *wirbelfrei* ist.



S3) Gegeben sei das Kraftfeld

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x^2 \\ y \end{pmatrix}$$

und die Wege

$$c_1 : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 2t^2 \end{pmatrix} \quad c_2 : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 4t \end{pmatrix}$$

für $t \in [0; 2]$. Berechnen Sie die beiden Linienintegrale $\int \vec{F} d\vec{r}$.

Kann **nur mit diesem Ergebnis** eine Aussage über \vec{F} gemacht werden? Begründung!

S4) Es sei das dreidimensionale Kraftfeld

$$\vec{F} = \frac{mGM\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

mit den Konstanten $G = 6,67 \cdot 10^{-11} [\frac{m^3}{kg \cdot s^2}]$, $M = 5,96 \cdot 10^{24} [kg]$ und $m = 1 [kg]$ gegeben.

Ein Körper wird in diesem Kraftfeld von $|\vec{r}| = R$ nach $|\vec{r}| \rightarrow \infty$ geschossen ($R = 6,4 \cdot 10^6 [m]$).

Ermitteln Sie die Arbeit

$$W = \int_c \vec{F} d\vec{r}$$

auf zwei frei wählbaren Wegen von R nach ∞ .

Begründen Sie, warum auf beiden Wegen die gleiche Arbeit geleistet wird.

S5) Es sei das Feld

$$\vec{F}(x; y) = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

gegeben.

- Zeigen Sie, dass es sich bei \vec{F} um ein *konservatives* Feld handelt.
- Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_c \vec{F} d\vec{r}$ mit $c: \vec{r} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ mit $t \in [0; 2\pi]$.
- Lösen sie den durch a) und b) entstandenen Widerspruch auf!¹

S6) Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{H}(x; y; z) = \begin{pmatrix} x + yz \\ y + xz \\ z + xy \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie das Kurvenintegral über

- die geradlinige Strecke von $(0; 0; 0)$ nach $(1; 1; 1)$.
- die Kurve c mit Parametrisierung

$$c: \quad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} \quad t \in [0; 1]$$

- den Streckenzug

$$(0; 0; 0) \rightarrow (1; 0; 0) \rightarrow (1; 1; 0) \rightarrow (1; 1; 1)$$

R1) Gegeben sei das konservative räumliche Vektorfeld

$$\vec{F}(x; y; z) = \begin{pmatrix} \sin(y) \\ x \cos(y) + \sin(z) \\ y \cos(z) \end{pmatrix}$$

- Berechnen Sie die zugehörige Potentialfunktion $\Phi(x; y; z)$.
- Berechnen Sie mit Hilfe des vorher bestimmten Potentials das Integral $\int_c \vec{F} d\vec{r}$ für einen Weg von $(0; 0; 0)$ nach $(5; \pi; 3\pi)$.
Achtung: Es ist ausdrücklich das Potential ϕ zu verwenden!

¹Der entscheidende Hinweis befindet sich im Skriptum bei Satz 3.4.19!