



Mathematik 2 - Übung

4. Test am 07.06.2018

Gruppe A / LÖSUNG

Name: _____

Matrikelnummer: _____

Bitte kreuzen Sie Ihren Referenten an:

Hawel

Kimeswenger

Aufgabe Nummer	1	2	3	Gesamt
Punktzahl	10	6	4	20
Davon erreicht				



1 Aufgabe

[10 Punkte]

Lösen Sie die Differenzialgleichung $y' + xy = 4x$ durch Variation der Konstanten.

Lösung:

$$\begin{aligned}y' + xy &= 0 \\ \int \frac{1}{y} dy &= - \int x dx \\ \ln |y| &= -\frac{x^2}{2} + c_1 \\ y &= c e^{-\frac{x^2}{2}}\end{aligned}$$

Wir variieren die Konstanten: $y(x) = c(x) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$
Ableiten der Lösung und einsetzen in die DGL ergibt:

$$\begin{aligned}y' &= c'(x) e^{-\frac{x^2}{2}} + c(x) e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (-x) \\ 4x &= c'(x) e^{-\frac{x^2}{2}} + c(x) e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (-x) + x(c(x) e^{-\frac{x^2}{2}}) \\ 4x &= c'(x) e^{-\frac{x^2}{2}} \\ c'(x) &= 4x \cdot e^{\frac{x^2}{2}}\end{aligned}$$

Integration liefert

$$c(x) = \int 4x \cdot e^{\frac{x^2}{2}} dx = \int 4x e^u \frac{du}{x} = 4 \int e^u du = 4 e^{\frac{x^2}{2}} + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

Die Lösung der allgemeinen inhomogenen Gleichung lautet

$$y(x) = (4 e^{\frac{x^2}{2}} + k) e^{-\frac{x^2}{2}} = 4 + k e^{-\frac{x^2}{2}}$$

2 Aufgabe

[6 Punkte]

Lösen Sie die Differenzialgleichung $y'' - 4y' + 4y = 0$ mit $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Lösung:

$$\begin{aligned}y(x) &= e^{\lambda x} \\ \lambda^2 - 4\lambda + 4 &= 0 \\ \lambda_{1,2} &= 2 \pm \sqrt{4 - 4} = 2 \\ y(x) &= c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}\end{aligned}$$

Einsetzen der Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned}0 &= c_1 + 0 \\ y'(x) &= 2c_1 e^{2x} + c_2(e^{2x} + 2x e^{2x}) \\ 1 &= 2c_1 + c_2(1 + 0) \\ c_2 &= 1\end{aligned}$$

Die Lösung des AWP lautet $y(x) = x e^{2x}$.



3 Aufgabe

[4 Punkte]

Für eine zweimal differenzierbare Funktion f sei der Operator

$$D: f \mapsto 3f'' + 2f'$$

gegeben.

Zeigen Sie, dass es sich um einen linearen Operator handelt.

Lösung:

- Zu zeigen ist $D(\lambda f) = \lambda D(f)$:

$$D(\lambda f) = 3(\lambda f)'' + 2(\lambda f)' = 3\lambda f'' + 2\lambda f' = \lambda(3f'' + 2f') = \lambda D(f)$$

- Zu zeigen ist $D(f + g) = D(f) + D(g)$:

$$\begin{aligned} D(f + g) &= 3(f + g)'' + 2(f + g)' = 3f'' + 3g'' + 2f' + 2g' \\ &= 3f'' + 2f' + 3g'' + 2g' \\ &= D(f) + D(g) \end{aligned}$$