Übung 11

S1) Lösen Sie das AWP

$$y'' + 20y' + 64y = 0 \qquad , y(0) = 0, y'(0) = 2$$

Lösung:

$$\lambda^2 + 20\lambda + 64 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -10 \pm \sqrt{36} = -10 \pm 6$$

$$\lambda_1 = -4$$

$$\lambda_2 = -16$$

$$y(x) = c_1 \, \mathrm{e}^{-4x} + c_2 \, \mathrm{e}^{-16x}$$

Einsetzen der Anfangswerte:

$$0 = c_1 + c_2$$

$$2 = -4c_1 - 16c_2$$

$$c_1 = \frac{1}{6}$$

$$c_2 = -\frac{1}{6}$$

$$y(x) = \frac{1}{6}\left(\mathrm{e}^{-4x} - \mathrm{e}^{-16x}\right)$$

S2) Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen der DGL

$$y'' + 10y' + 25y = 3\cos(5x)$$

Verwenden Sie den Ansatz $y_p = A \cdot \sin(5x),\ A \in \mathbb{R}$ zur Bestimmung einer partikulären Lösung.

Lösung:
Wir bestimmen zuerst die homogene Lösung.

$$y'' + 10y' + 25y = 0$$

$$\lambda^2 + 10\lambda + 25 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -5 \pm \sqrt{25 - 25}$$

$$\lambda = -5$$

Wir erhalten als homogene Lösung

$$y_h = c_1 \, \mathrm{e}^{-5x} + c_2 x \, \mathrm{e}^{-5x}$$

Den gegebenen Ansatz $y_p = A \cdot \sin(5x)$ setzen wir nach Differentiation in die DGL ein.

$$y_p' = 5A \cdot \cos(5x)$$

$$y_p'' = -25A \cdot \sin(5x)$$

$$
\begin{aligned}
-25A\cdot\sin(5x)+50A\cdot\cos(5x)+25A\cdot\sin(5x) &= 3\cos(5x)\\
50A\cdot\cos(5x) &= 3\cos(5x)\\
A &= \frac{3}{50}
\end{aligned}
$$

Die allgemeine Lösung lautet demnach

$$y(x)=y_h+y_p=c_1\,\mathrm{e}^{-5x}+c_2x\,\mathrm{e}^{-5x}+\frac{3}{50}\sin(5x)$$

S3) Auf einer mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω rotierenden Scheibe vom Radius R bewegt sich eine Masse m *reibungsfrei* nach außen. Das Weg-Zeit-Gesetz $r=r(t)$ genügt der Gleichung

$$\ddot{r}-\omega^2\cdot r=0$$

Wie lautet die Lösung dieser DGL mit den Anfangswerten $r(0)=1$ und $\dot{r}(0)=0$?

Lösung:

$$
\begin{aligned}
\ddot{r}-\omega^2 r &= 0\\
\lambda^2-\omega^2 &= 0\\
\lambda &= \pm\omega\\
r(t) &= c_1\,\mathrm{e}^{\omega t}+c_1\,\mathrm{e}^{-\omega t}
\end{aligned}
$$

Einsetzen der Anfangsbedingungen:

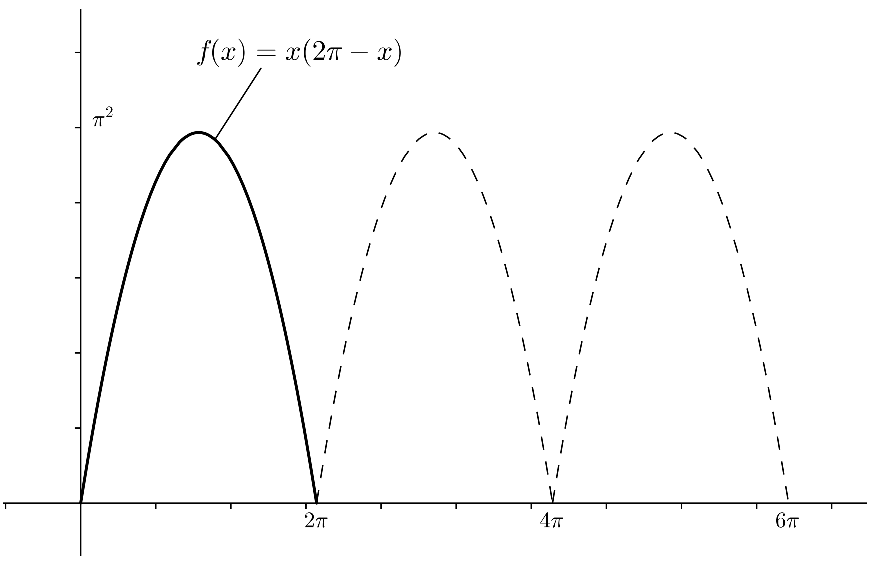
$$
\begin{aligned}
1 &= c_1+c_2\\
0 &= \omega c_1-\omega c_2
\end{aligned}
$$

$$c_1=c_2=\frac{1}{2}$$

Die Lösung des Problems lautet somit

$$r(t)=\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{\omega t}+\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-\omega t}=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\omega t}+\mathrm{e}^{-\omega t}\right)$$

S4) Bestimmen Sie die *reelle* Fourier-Reihe der dargestellten periodischen Funktion.

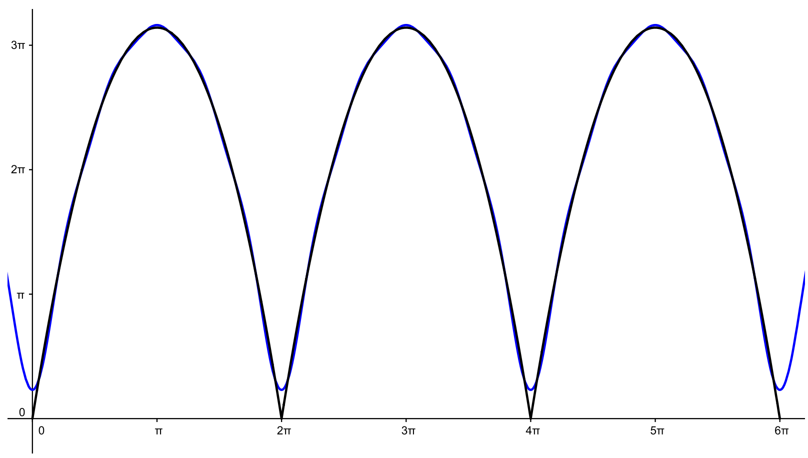


Lösung:
Es handelt sich um eine gerade Funktion, damit gilt sicher $b_n = 0$.

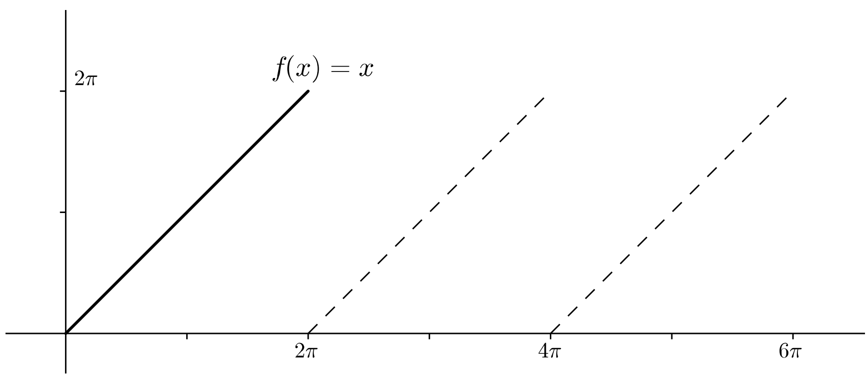
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(2\pi x - x^2)dx = \frac{1}{\pi}\left[\pi x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi}\left(4\pi^3 - \frac{8\pi^3}{3} - 0\right) = \frac{4\pi^2}{3}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(2\pi x - x^2)\cos(nx)dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left(2\pi\left[\frac{\cos(nx)}{n^2} + \frac{x\sin(nx)}{n}\right]_0^{2\pi} - \left[\frac{2x\cos(nx)}{n^2} + \frac{(n^2x^2-2)\sin(nx)}{n^3}\right]_0^{2\pi}\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\left(2\pi\left(\frac{1}{n^2} + 0 - \frac{1}{n^2} - 0\right) - \left(\frac{4\pi}{n^2} + 0 - 0\right)\right) = -\frac{4}{n^2} \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{2\pi^2}{3} - \frac{4}{1}\cos(x) - \frac{4}{4}\cos(2x) - \frac{4}{9}\cos(3x) - \dots$$



S5) Bestimmen Sie die reelle Fourier-Reihe der dargestellten periodischen Funktion.



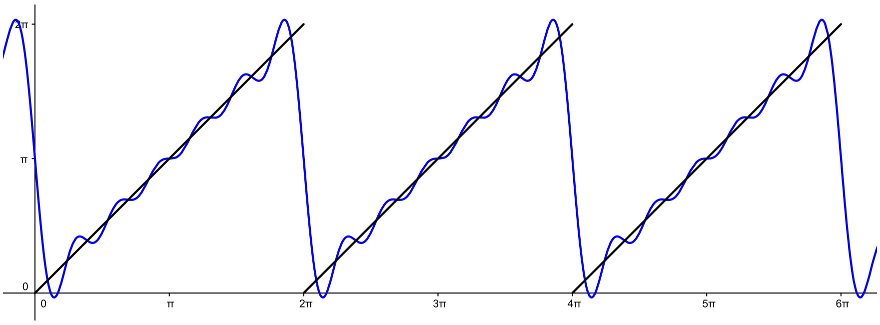
Lösung:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} x dx = 2\pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} x\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(nx)}{n^2} + \frac{x\sin(nx)}{n}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n^2} + 0 - \frac{1}{n^2} - 0\right) = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} x\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(nx)}{n^2} - \frac{x\cos(nx)}{n}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi}\left(0 - \frac{2\pi}{n} - 0 + 0\right) = -\frac{2}{n}$$

$$f(x) = \pi - 2\sin(x) - \sin(2x) - \frac{2}{3}\sin(3x) - \ldots$$



R1) Ein Massepunkt bewege sich in der $xy-$Ebene so, dass seine Koordinaten x und y den Differenzialgleichungen

$$\ddot{x} = \dot{y}$$
$$\ddot{y} = -\dot{x}$$

genügen. Bestimmen und skizzieren Sie die *Bahnkurve* für die Anfangswerte

$$x(0) = y(0) = 0 \qquad \dot{x}(0) = 0 \qquad \dot{y}(0) = 1$$

Hinweis: Verwenden Sie die Substitution $u = \dot{x}$ und $v = \dot{y}$ um auf ein DGL-System erster Ordnung zu kommen.

Lösung: Mit den Substitutionen $u = \dot{x}$ und $v = \dot{y}$ erhalten wir noch $\dot{u} = \ddot{x}$ und $\dot{v} = \ddot{y}$. damit ergibt sich das lineare System

$$\dot{u} = v$$
$$\dot{v} = -u$$

In Matrixform lautet das zu lösende System

$$\begin{pmatrix}\dot{u}\\ \dot{v}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}$$

Wir berechnen die allgemeine Lösung durch Bestimmung der Eigenwerte und Eigenräume.

$$\begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ -1 & -\lambda\end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm i$$

Eigenraum für $\lambda = i$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iu \\ iv \end{pmatrix}$$
$$v = iu$$
$$-u = iv$$

Der Eigenraum E_i hat die Form $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ mit $c_1 \in \mathbb{C}$.

Eigenraum für $\lambda = -i$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -iu \\ -iv \end{pmatrix}$$
$$v = -iu$$
$$-u = -iv$$

Der Eigenraum E_{-i} hat die Form $c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ mit $c_2 \in \mathbb{C}$.

Die allgemeine Lösung ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \mathrm{e}^{it} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-it}$$

Die reellen Lösungen sind noch zu bestimmen:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \mathrm{e}^{it} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} (\cos(t) + i\sin(t)) = \begin{pmatrix} \cos(t) + i\sin(t) \\ -\sin(t) + i\cos(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \qquad (k_1, k_2 \in \mathbb{R})$$

Wir müssen noch die Substitution rückgängig machen.

$$x = \int \dot{x} dt = \int u\, dt = \int (k_1 \cos(t) + k_2 \sin(t))\, dt = k_1 \sin(t) - k_2 \cos(t) + K_1$$
$$y = \int \dot{y} dt = \int v\, dt = \int (-k_1 \sin(t) + k_2 \cos(t))\, dt = k_1 \cos(t) + k_2 \sin(t) + K_2$$

Die spezielle Lösung für unsere Aufgabenstellung erhalten wir aus den Anfangsbedingungen.

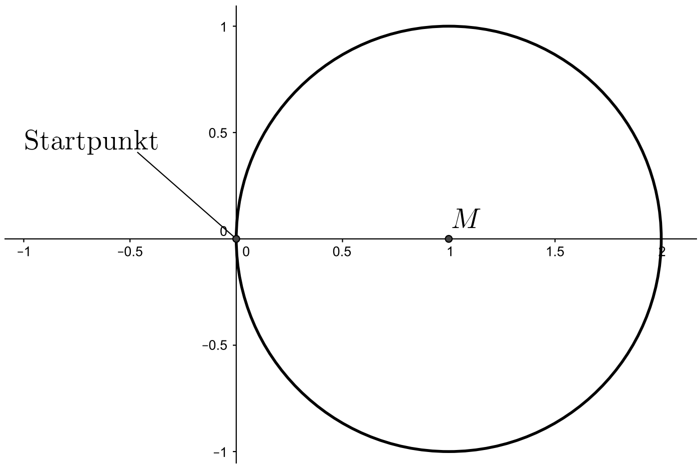
$$0 = k_1 \sin(0) - k_2 \cos(0) + K_1 = -k_2 + K_1$$
$$0 = k_1 \cos(0) + k_2 \sin(0) + K_2 = k_1 + K_2$$
$$0 = k_1 \cos(0) + k_2 \sin(0) = k_1$$
$$1 = -k_1 \sin(0) + k_2 \cos(0) = k_2$$

Wir erhalten somit

$$k_1 = 0$$
$$k_2 = 1$$
$$K_1 = 1$$
$$K_2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(t) + 1 \\ \sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es handelt sich um einen Kreis mit Mittelpunkt $M(1;0)$ und Radius $r = 1$.


Startpunkt
M
1
0.5
0
−0.5
−1
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
2