Übung 1

S1) Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke und geben Sie die Ergebnisse in kartesischer Form an:

$$a)\ \frac{4\overline{(3-i)}}{(1+i)(-1+i)} \qquad b)\ (2-4i)^2 + \frac{|1-\sqrt{3}i|}{i} \qquad c)\ \frac{(3+i)\,(\cos(120°) - i\cdot\sin(120°))}{(1-i)^2\cdot\overline{(2i)}}$$

Lösung:

a)

$$\frac{4\overline{(3-i)}}{(1+i)(-1+i)} = \frac{4(3+i)}{i^2-1} = \frac{12+4i}{-2} = -6-2i$$

b)

$$(2-4i)^2 + \frac{|1-\sqrt{3}i|}{i} = 4-16i-16+\frac{\sqrt{1^2+3}}{i} = -12-16i+\frac{2}{i} = -12-16i-2i = -12-18i$$

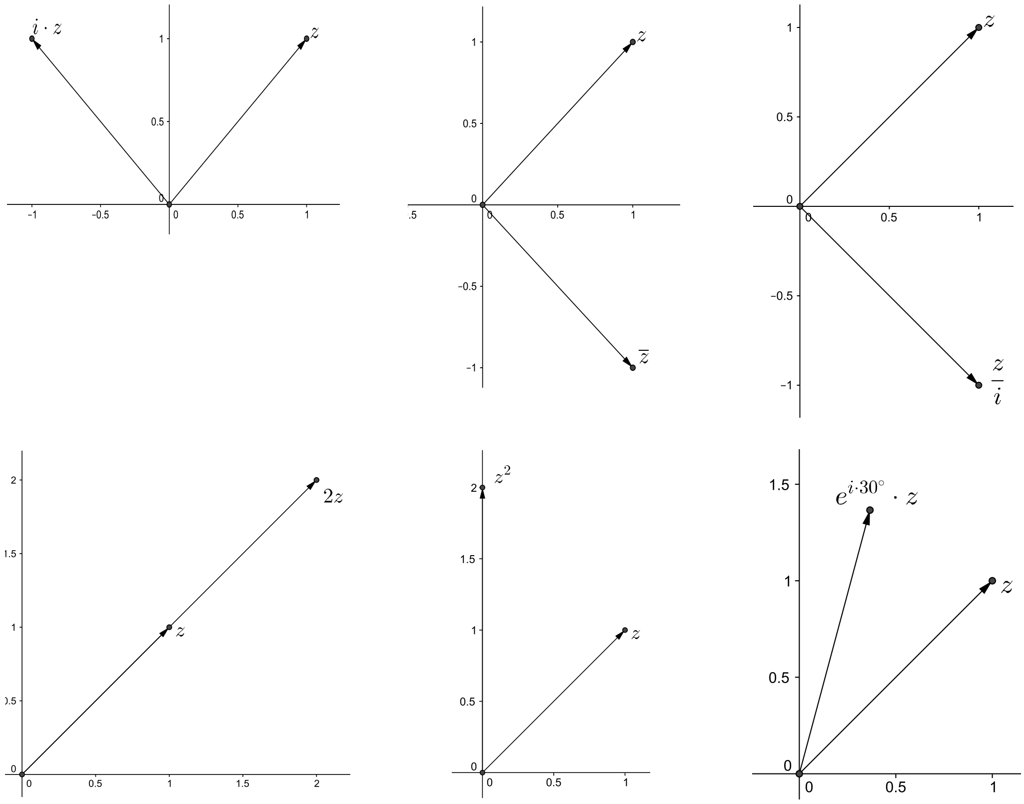
c)

$$\begin{aligned}
\frac{(3+i)\,(\cos(120°) - i\cdot\sin(120°))}{(1-i)^2\cdot\overline{(2i)}} &= \frac{(3+i)(-0,5-i\frac{\sqrt{3}}{2})}{(1-2i-1)\cdot(-2i)} = \frac{-1,5-i\frac{3\sqrt{3}}{2}-0,5i+\frac{\sqrt{3}}{2}}{-2i-4+2i} \\
&= \frac{-1,5+\frac{\sqrt{3}}{2}-i(0,5+\frac{3\sqrt{3}}{2})}{-4} \approx \frac{-0,634-3,098i}{-4} \\
&= 0,1585+0,7745i
\end{aligned}$$

S2) Gegeben sei die Zahl $z = 1 + i$. Stellen Sie die folgenden Operationen geometrisch in der Zahlenebene dar.

$a)\ i \cdot z \qquad b)\ \overline{z} \qquad c)\ \dfrac{z}{i} \qquad d)\ 2 \cdot z \qquad e)\ z^2 \qquad f)\ \mathrm{e}^{i \cdot 30^\circ} \cdot z$

Lösung:



S3) Berechnen Sie die folgenden Potenzen möglichst geschickt.

$a)\ (3 - \sqrt{3}i)^4 \qquad b)\ \left(\dfrac{3-i}{2+i}\right)^3 \qquad c)\ \left[2\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right)\right]^{10}$

Lösung:

a)

$$(3 - \sqrt{3}i)^4 = \left(\sqrt{12}\,\mathrm{e}^{i \cdot (-30^\circ)}\right)^4 = 144\,\mathrm{e}^{i \cdot (-120^\circ)} = 144\,\mathrm{e}^{i \cdot 240^\circ}$$

b)

$$\left(\frac{3-i}{2+i}\right)^3 = \left(\frac{(3-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}\right)^3 = \left(\frac{5-5i}{4+1}\right)^3 = (1-i)^3 = \left(\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i \cdot 315^\circ}\right)^3 = 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i \cdot 225} = -2-2i$$

c)

$$\left[2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\right]^{10} = \left(2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{10} = 1024\,\mathrm{e}^{i\frac{10\pi}{3}} = 1024\,\mathrm{e}^{i \cdot 240^\circ}$$

S4) Lösen Sie die folgenden Gleichungen.

$a)\ z^3 = i \qquad b)\ z^4 = 16\,\mathrm{e}^{i\cdot 160°} \qquad c)\ x^2 + 4x + 8 = 0 \qquad d)\ x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = 0$

Lösung:

a)

$$\begin{aligned}
z^3 &= i = 1 \cdot \mathrm{e}^{i\cdot 90°} \implies r = \sqrt[3]{1} = 1 \\
\varphi_k &= \frac{90° + k \cdot 360°}{3} \quad , k \in \{0, 1, 2\} \\
z_0 &= \mathrm{e}^{i\cdot 30°} \\
z_1 &= \mathrm{e}^{i\cdot 150°} \\
z_2 &= \mathrm{e}^{i\cdot 270°}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
z^4 &= 16\,\mathrm{e}^{i\cdot 160°} \implies r = \sqrt[4]{16} = 2 \\
\varphi_k &= \frac{160° + k \cdot 360°}{4} \quad , k \in \{0, 1, 2, 3\} \\
z_0 &= 2\,\mathrm{e}^{i\cdot 40°} \\
z_1 &= 2\,\mathrm{e}^{i\cdot 130°} \\
z_2 &= 2\,\mathrm{e}^{i\cdot 220°} \\
z_3 &= 2\,\mathrm{e}^{i\cdot 310°}
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
x^2 + 4x + 8 &= 0 \\
x_{1,2} &= -2 \pm \sqrt{4 - 8} = -2 \pm \sqrt{-4} = -2 \pm 2i
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
x^3 - 3x^2 + 4x - 2 &= 0 \\
x_1 &= 1 \qquad \text{(durch Probieren gefunden)}
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{l}
\big(\quad x^3 - 3x^2 + 4x - 2\big) : \big(x - 1\big) = x^2 - 2x + 2 \\
\underline{-\,x^3 \ \ + x^2} \\
\qquad -\,2x^2 + 4x \\
\qquad \underline{\quad 2x^2 - 2x} \\
\qquad\qquad\quad 2x - 2 \\
\qquad\qquad \underline{-\,2x + 2} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
x^2 - 2x + 2 &= 0 \\
x_{2,3} &= 1 \pm \sqrt{1 - 2} = 1 \pm i
\end{aligned}$$

S5) Lösen Sie die Gleichung

$$z^2 - 2(1-i)z - 2i + 1 = 0$$

Hinweis: Es gilt weiterhin die normale Lösungsformel für quadratische Gleichungen.

Lösung:

$$\begin{aligned}
z^2 - 2(1-i)z - 2i + 1 &= 0 \\
z_{1,2} &= (1-i) \pm \sqrt{(1-i)^2 - (-2i+1)} = 1 - i \pm \sqrt{1 - 2i - 1 + 2i - 1} \\
&= 1 - i \pm \sqrt{-1} = 1 - i \pm i \\
z_1 &= 1 \\
z_2 &= 1 - 2i
\end{aligned}$$

S6) a) Zeigen Sie die Gültigkeit der Gleichungen

$$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} \qquad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \qquad \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$$

b) Zeigen Sie die Gültigkeit der *Parallelogrammregel* für $z, w \in \mathbb{C}$.

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2\left(|z|^2 + |w|^2\right)$$

Hinweis: Verwenden Sie Punkt a) und verwenden Sie $z = a + ib$.

Lösung:

a) Wir setzen $z = a + ib$.

$$\sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{(a+ib)(a-ib)} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$$

Wir setzten $z_1 = a_1 + ib_1$ und $z_2 = a_2 + ib_2$.

$$\begin{aligned}
\overline{z_1 + z_2} &= \overline{a_1 + ib_1 + a_2 + ib_2} = \overline{a_1 + a_2 + i(b_1 + b_2)} = a_1 + a_2 - i(b_1 + b_2) \\
&= a_1 - ib_1 + a_2 - ib_2 = \overline{z_1} + \overline{z_2}
\end{aligned}$$

Wir verwenden wieder $z = a + ib$.

$$\begin{aligned}
\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} &= \overline{\left(\frac{1}{a+ib}\right)} = \overline{\left(\frac{a-ib}{a^2+b^2}\right)} = \overline{\left(\frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}\right)} \\
&= \left(\frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{b}{a^2+b^2}\right) = \frac{a+ib}{a^2+b^2} = \frac{z}{|z|^2} = \frac{z}{z \cdot \overline{z}} = \frac{1}{\overline{z}}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
|z+w|^2 + |z-w|^2 &= (z+w)\overline{(z+w)} + (z-w)\overline{(z-w)} \\
&= (z+w)(\overline{z} + \overline{w}) + (z-w)(\overline{z} - \overline{w}) \\
&= z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w} + z\overline{z} - z\overline{w} - w\overline{z} + w\overline{w} \\
&= 2z\overline{z} + 2w\overline{w} = 2|z|^2 + 2|w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)
\end{aligned}$$

Die Gleichung besagt, dass die quadrierten Längen der Diagonalen eines Parallelogramms, doppelt so groß sind, wie die Summe der quadrierten Seitenlängen.

R1) Skizzieren Sie die Punktmenge in der Zahlenebene, welche durch die gegebene Gleichung festgelegt wird. Verwenden Sie $z = a + ib$.

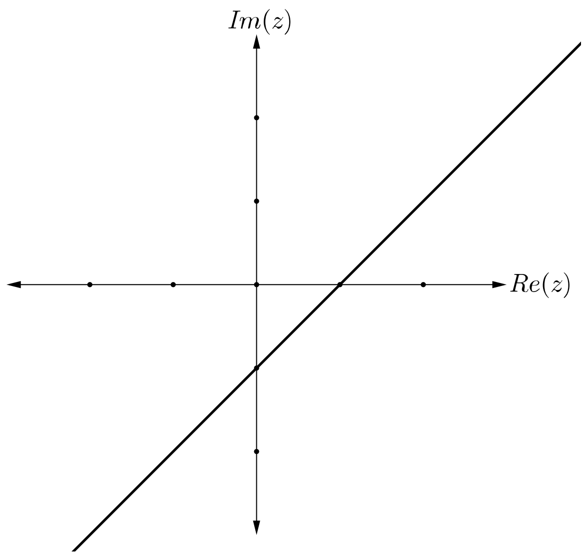
$$a) \left|\frac{z-1-i}{z-2}\right| = 1 \qquad\qquad b)\ z\overline{z} < 3(z+\overline{z})+1 \quad \text{und} \quad \mathrm{Re}(z) > 0$$

Lösung:

a) Die Gleichung ist nur für $z \in \mathbb{C} \setminus \{2\}$ definiert. Wir verwenden wieder $z = a + ib$.

$$\begin{aligned}
\left|\frac{z-1-i}{z-2}\right| &= 1 \\
|z-1-i| &= |z-2| \\
|a+ib-1-i| &= |a+ib-2| \\
|a-1+i(b-1)| &= |a-2+ib| \\
\sqrt{(a-1)^2+(b-1)^2} &= \sqrt{(a-2)^2+b^2} \\
(a-1)^2+(b-1)^2 &= (a-2)^2+b^2 \\
a^2-2a+1+b^2-2b+1 &= a^2-4a+4+b^2 \\
2a-2b-2 &= 0 \\
a-b &= 1 \\
b &= a-1
\end{aligned}$$

Die gültigen Zahlen z liegen somit auf der Geraden $y = x - 1$ wobei x dem Real- und y dem Imaginärteil entspricht.



b) $\mathrm{Re}(z) > 0$ schränkt die Lösungsmenge auf die rechte Halbebene ein. Wir setzen $z = a + ib$.

$$\begin{aligned}
z\overline{z} &< 3(z+\overline{z})+1 \\
|z|^2 &< 3z+3\overline{z}+1 \\
a^2+b^2 &< 3a+3bi+3a-3bi+1 \\
a^2+b^2 &< 6a+1 \\
a^2-6a-1+b^2 &< 0
\end{aligned}$$

Wir ergänzen auf ein vollständiges Quadrat.

$$\begin{aligned}
(a-3)^2-9-1+b^2 &< 0 \\
(a-3)^2+b^2 &< 10
\end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist die offene Kreisscheibe (d.h. ohne Rand) mit Radius $\sqrt{10}$ und Mittelpunkt $M(3;0)$, wobei nur die Punkte der rechten Halbebene genommen werden dürfen.