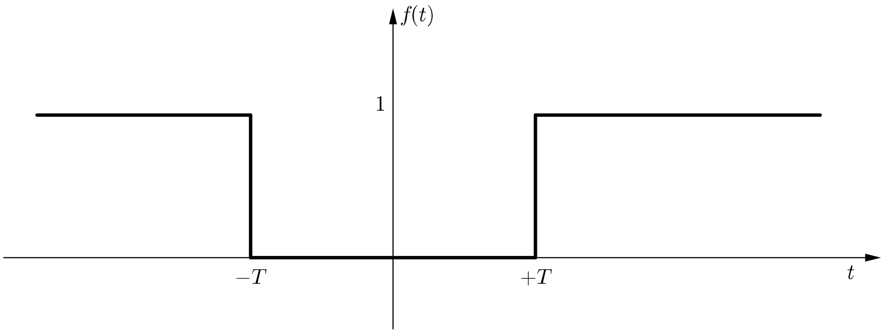
Übung 12

S1) Beschreiben Sie die abgebildete Funktion mit Hilfe der *Sigmafunktion*.



Lösung:

$$f(t) = \sigma(-t - T) + \sigma(t - T)$$

S2) Werten Sie die folgenden Integrale aus:

a)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \delta(t + \frac{\pi}{2}) \cdot \sin(2t)dt = \sin\left(2 \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 0$$

b)

$$\int_{0}^{3} \delta(t - \mathrm{e}^1) \cdot \ln(t)dt = \ln(\mathrm{e}) = 1$$

c)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - T) \cdot (\sigma(t + \pi) - \sigma(t - \pi)) \cdot \cos(t)dt =$$

$$= (\sigma(T + \pi) - \sigma(T - \pi)) \cdot \cos(T) = \begin{cases} \cos(T) & , -\pi \leq T \leq \pi \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

d) Wir substituieren $u = 2t - 8$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(2t - 8) \cdot t^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u) \cdot \left(\frac{u + 8}{2}\right)^2 \frac{du}{2} = \frac{64}{8} = 8$$

S3) Bestimmen Sie mit Hilfe des *Ableitungssatzes* für die Bildfunktion die Fourier-Transformierte von $g(t) = t \cdot f(t)$.

a) $f(t) = \mathrm{e}^{-5t} \cdot \sigma(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(\omega) = \frac{1}{5+i\omega}$

b) $f(t) = \mathrm{e}^{-t^2} \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(\omega) = \sqrt{\pi} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4}}$

Lösung: Der Ableitungssatz für die Bildfunktion lautet $F^{(n)}(\omega) = \mathcal{F}\{(-it)^n \cdot f(t)\}$. Etwas umgeformt erhalten wir für die *erste Ableitung*

$$F'(\omega) = \mathcal{F}\{(-it) \cdot f(t)\} = -i\mathcal{F}\{t \cdot f(t)\} = -i\mathcal{F}\{g(t)\} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{F}\{g(t)\} = iF'(\omega)$$

a)

$$\mathcal{F}\{g(t)\} = i\left(\frac{1}{5+i\omega}\right)' = -i(5+i\omega)^{-2} \cdot i = \frac{1}{(5+i\omega)^2}$$

b)

$$\mathcal{F}\{g(t)\} = i\left(\sqrt{\pi} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4}}\right)' = i\sqrt{\pi}\,\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4}} \cdot \left(-\frac{\omega}{2}\right) = -\frac{i\sqrt{\pi}\omega\,\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4}}}{2}$$

S4) Ermitteln Sie mit Hilfe des *Faltungssatzes* die zugehörige Originalfunktion.

a)

$$F(\omega) = \frac{1}{(1+i\omega)(3+i\omega)}$$

b)

$$F(\omega) = \frac{1}{(1+i\omega)^3}$$

Lösung:

a)

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{1}{(1+i\omega)(3+i\omega)} = \frac{1}{1+i\omega} \cdot \frac{1}{3+i\omega} = F_1(\omega) \cdot F_2(\omega) \\ f_1(t) &= \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{1+i\omega}\right\} = \mathrm{e}^{-t} \cdot \sigma(t) \\ f_2(t) &= \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{3+i\omega}\right\} = \mathrm{e}^{-3t} \cdot \sigma(t) \end{aligned}$$

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = f_1 * f_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-u}\,\sigma(u) \cdot \mathrm{e}^{-3(t-u)}\,\sigma(t-u)du$$

Für $t \geq 0$ erhalten wir

$$f(t) = \int_0^t \mathrm{e}^{-u} \cdot \mathrm{e}^{-3(t-u)}\,du = \mathrm{e}^{-3t} \int_0^t \mathrm{e}^{2u}\,du = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-3t}\right)$$

Für $t < 0$ gilt

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-u}\,\sigma(u) \cdot \mathrm{e}^{-3(t-u)}\,\sigma(t-u)du = 0$$

weil die beiden Sigma-Funktionen den ganzen Integranden auf Null setzen. Damit können wir als Endergebnis $f(t) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-3t}\right)\sigma(t)$ festhalten.

b)

$$
\begin{aligned}
F(\omega) &= \frac{1}{(1+i\omega)^3} = \frac{1}{(1+i\omega)^2} \cdot \frac{1}{(1+i\omega)} = F_1(\omega) \cdot F_2(\omega) \\
f_1(t) &= \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{(1+i\omega)^2}\right\} = t\,\mathrm{e}^{-t} \cdot \sigma(t) \\
f_2(t) &= \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{1+i\omega}\right\} = \mathrm{e}^{-t} \cdot \sigma(t)
\end{aligned}
$$

$$
f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = f_1 * f_2 = \int_{-\infty}^{\infty} u\,\mathrm{e}^{-u}\,\sigma(u) \cdot \mathrm{e}^{-(t-u)}\,\sigma(t-u)du
$$

Für $t \geq 0$ erhalten wir

$$
f(t) = \int_0^t u\,\mathrm{e}^{-t}\,du = \frac{1}{2}t^2\,\mathrm{e}^{-t}
$$

und für $t < 0$ gilt

$$
f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u\,\mathrm{e}^{-u}\,\sigma(u) \cdot \mathrm{e}^{-(t-u)}\,\sigma(t-u)du = 0
$$

da die Sigma-Funktionen den Integranden auf Null setzen. Somit gilt

$$
f(t) = \frac{1}{2}t^2\,\mathrm{e}^{-t} \cdot \sigma(t)
$$

S5) Lösen Sie das AWP mittels *Laplace-Transformation.*

a) $y' + 3y = -\cos(t) \quad , y(0) = 5$ (Hinweis: Faltungssatz verwenden)

b) $y' - 3y = 4t \cdot \mathrm{e}^t \quad , y(0) = a$

Lösung:

a)

$$
\begin{aligned}
y' + 3y &= -\cos(t) \\
\mathcal{L}\{y'\} + 3\mathcal{L}\{y\} &= \mathcal{L}\{-\cos(t)\} \\
sY(s) - y(0) + 3Y(s) &= -\frac{s}{s^2+1} \\
Y(s)\,(s+3) - 5 &= -\frac{s}{s^2+1} \\
Y(s) &= -\frac{s}{(s^2+1)(s+3)} + \frac{5}{s+3} = \underbrace{-\frac{s}{s^2+1}}_{F_1(s)} \cdot \underbrace{\frac{1}{s+3}}_{F_2(s)} + \frac{5}{s+3}
\end{aligned}
$$

Auf das entstandene Produkt wenden wir den Faltungssatz $\mathcal{L}^{-1}\{F_1 \cdot F_2\} = f_1 * f_2$ für die Laplace-Transformation an.

$$
\begin{aligned}
f_1 * f_2 &= \int_0^t f_1(u) \cdot f_2(t-u)du = \int_0^t -\cos(u) \cdot \mathrm{e}^{-3(t-u)}\,du \\
&= -\mathrm{e}^{-3t} \int_0^t \cos(u)\,\mathrm{e}^{3u}\,du = -0{,}3\cos(t) - 0{,}1\sin(t) + 0{,}3\,\mathrm{e}^{-3t}
\end{aligned}
$$

Die vollständige Lösung lautet

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{s}{(s^2+1)(s+3)}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s+3}\right\} = -0,3\cos(t) - 0,1\sin(t) + 5,3\,\mathrm{e}^{-3t}$$

b)

$$\begin{aligned}
y' - 3y &= 4t \cdot \mathrm{e}^t \\
sY(s) - a - 3Y(s) &= \frac{4}{(s-1)^2} \\
Y(s)\,(s-3) &= \frac{4}{(s-1)^2} + a \\
Y(s) &= \frac{4}{(s-1)^2(s-3)} + \frac{a}{s-3}
\end{aligned}$$

Wir führen eine PBZ für den ersten Summanden durch.

$$\begin{aligned}
\frac{4}{(s-1)^2(s-3)} &= \frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{C}{s-3} \\
4 &= A(s-1)(s-3) + B(s-3) + C(s-1)^2 \\
s=1:\ 4 &= -2B \implies B = -2 \\
s=3:\ 4 &= 4C \implies C = 1 \\
s=0:\ 4 &= 3A + 6 + 1 \implies A = -1
\end{aligned}$$

Wir erhalten insgesamt

$$\begin{aligned}
Y(s) &= -\frac{1}{s-1} - \frac{2}{(s-1)^2} + \frac{1}{s-3} + \frac{a}{s-3} \\
y(t) &= -\mathrm{e}^t - 2t\,\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{3t} + a\,\mathrm{e}^{3t} \\
y(t) &= -\mathrm{e}^t(1+2t) + \mathrm{e}^{3t}(1+a)
\end{aligned}$$

S6) Lösen Sie das Anfangswertproblem durch Laplace-Transformation.

$$y'' + 2y' - 3y = 2t \qquad , y(0) = 1 \text{ und } y'(0) = 0$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
y'' + 2y' - 3y &= 2t \\
s^2Y(s) - s\cdot y(0) - y'(0) + 2(sY(s) - y(0)) - 3Y(s) &= \frac{2}{s^2} \\
s^2Y(s) - s + 2(sY(s) - 1) - 3Y(s) &= \frac{2}{s^2} \\
Y(s)(s^2 + 2s - 3) &= \frac{2}{s^2} + s + 2 \\
Y(s) &= \frac{2}{s^2(s^2+2s-3)} + \frac{s}{s^2+2s-3} + \frac{2}{s^2+2s-3} \\
Y(s) &= \frac{2 + s^3 + 2s^2}{s^2(s^2+2s-3)} = \frac{s^3+2s^2+2}{s^2(s+3)(s-1)}
\end{aligned}$$

Wir machen eine Partialbruchzerlegung:

$$\frac{s^3+2s^2+2}{s^2(s+3)(s-1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+3} + \frac{D}{s-1}$$
$$s^3+2s^2+2 = As(s+3)(s-1) + B(s+3)(s-1) + Cs^2(s-1) + Ds^2(s+3)$$

$$\begin{aligned}
&s=0: && 2=-3B && B=-\frac{2}{3}\\
&s=-3: && -7=-36C && C=\frac{7}{36}\\
&s=1: && 5=4D && D=\frac{5}{4}\\
&s=-1: && 3=-A(2)(-2)+B(2)(-2)-2C+2D && \\
& && 3=4A+\frac{8}{3}-\frac{7}{18}+\frac{5}{2} && A=-\frac{4}{9}
\end{aligned}$$

$$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+3} + \frac{D}{s-1} = -\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{s} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{s^2} + \frac{7}{36}\cdot\frac{1}{s+3} + \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{s-1}$$
$$y(t) = -\frac{4}{9} - \frac{2}{3}t + \frac{7}{36}\,\mathrm{e}^{-3t} + \frac{5}{4}\,\mathrm{e}^{t}$$

R1) Geben Sie eine Lösung der DGL mit Hilfe der Fouriertransformation an:

$$y - y'' = \mathrm{e}^{-|x|} \qquad , x \in \mathbb{R}$$

Hinweis: Verwenden Sie den Faltungssatz und teilen Sie das am Ende entstehende Integral geschickt auf.

Lösung:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{y\} - \mathcal{F}\{y''\} &= \mathcal{F}\left\{\mathrm{e}^{-|x|}\right\}\\
Y(\omega) - (i\omega)^2 Y(\omega) &= \frac{2}{1+\omega^2}\\
Y(\omega) + \omega^2 Y(\omega) &= \frac{2}{1+\omega^2}\\
Y(\omega)\cdot(1+\omega^2) &= \frac{2}{1+\omega^2}\\
Y(\omega) &= \frac{2}{(1+\omega^2)^2} = \frac{2}{1+\omega^2}\cdot\frac{1}{1+\omega^2} = \underbrace{\frac{2}{1+\omega^2}}_{Y_1(\omega)}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}\frac{2}{1+\omega^2}}_{Y_2(\omega)}
\end{aligned}$$

Jetzt verwenden wir den Faltungssatz $Y_1(\omega)\cdot Y_2(\omega) \bullet\!\!-\!\!\circ\ y_1 * y_2$ und die schon oben gebrauchte Korrespondenz

$$\mathrm{e}^{-a|x|} \ \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

$$y(x) = \mathcal{F}^{-1}\{Y_1(\omega)\cdot Y_2(\omega)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-|u|}\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-|x-u|}\,du = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-|u|-|x-u|}\,du$$

Jetzt teilen wir das Integral an jenen Stellen auf, wo die Beträge relevant sind. Dazu ist eine Fallunterscheidung notwendig.

- $x \leq 0$:

$$
\begin{aligned}
y(x) &= \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-|u|-|x-u|}\,du = \frac{1}{2}\left(\int\limits_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{u-(x-u)}\,du + \int\limits_{x}^{0} \mathrm{e}^{u+(x-u)}\,du + \int\limits_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-u+(x-u)}\,du\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left[\frac{\mathrm{e}^{2u-x}}{2}\right]_{-\infty}^{x} + \left[u\,\mathrm{e}^{x}\right]_{x}^{0} + \left[\frac{\mathrm{e}^{-2u+x}}{-2}\right]_{0}^{\infty}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{e}^{x}}{2} - 0 + 0 - x\,\mathrm{e}^{x} + 0 + \frac{\mathrm{e}^{x}}{2}\right) = \frac{(1-x)\,\mathrm{e}^{x}}{2}
\end{aligned}
$$

- $x > 0$:

$$
\begin{aligned}
y(x) &= \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-|u|-|x-u|}\,du = \frac{1}{2}\left(\int\limits_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{u-(x-u)}\,du + \int\limits_{0}^{x} \mathrm{e}^{-u-(x-u)}\,du + \int\limits_{x}^{\infty} \mathrm{e}^{-u+(x-u)}\,du\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left[\frac{\mathrm{e}^{2u-x}}{2}\right]_{-\infty}^{0} + \left[u\,\mathrm{e}^{-x}\right]_{0}^{x} + \left[\frac{\mathrm{e}^{-2u+x}}{-2}\right]_{x}^{\infty}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{e}^{-x}}{2} - 0 + x\,\mathrm{e}^{-x} - 0 + 0 + \frac{\mathrm{e}^{-x}}{2}\right) = \frac{(1+x)\,\mathrm{e}^{-x}}{2}
\end{aligned}
$$

Eine Lösung der Differenzialgleichung lautet somit

$$
y(x) = \begin{cases} \frac{(1-x)\,\mathrm{e}^{x}}{2} & , x \leq 0 \\ \frac{(1+x)\,\mathrm{e}^{-x}}{2} & , x > 0 \end{cases}
$$