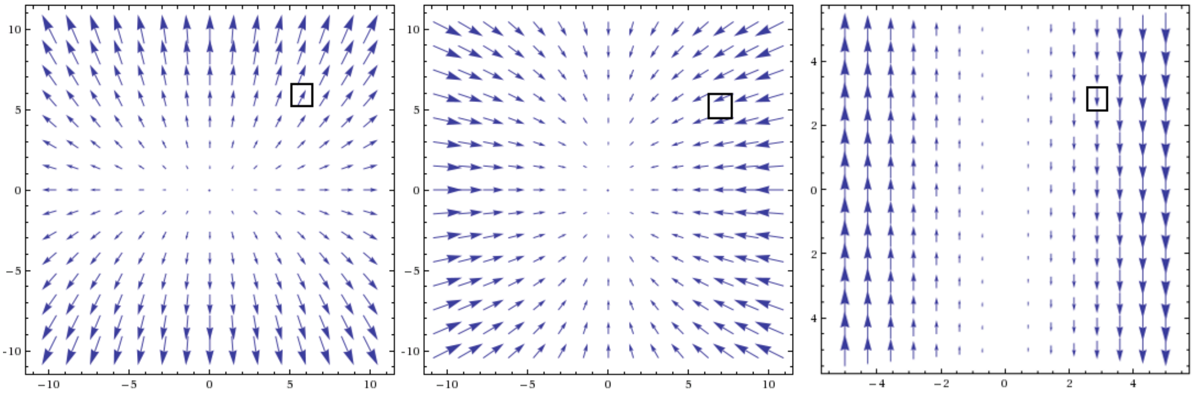
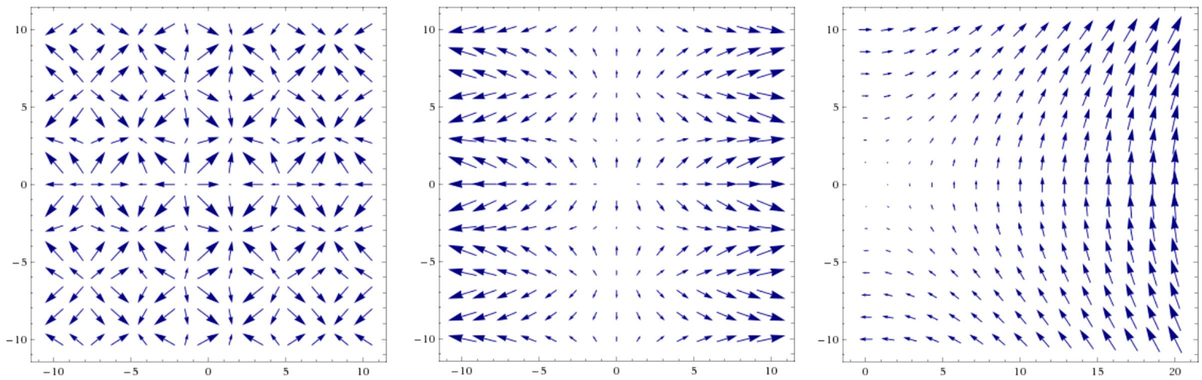
Übung 8

S1) Sie haben die drei abgebildeten Vektorfelder vorliegen. Bestimmen Sie rein anschaulich, ob die Divergenz im eingezeichneten schwarzen Kästchen positiv, negativ, oder gleich Null ist.



Lösung: In der ersten Abbildung fließt mehr aus dem Quadrat heraus als hinein, die Divergenz ist also positiv. Es handelt sich um eine Quelle.
Bei der zweiten Abbildung verhält es sich genau umgekehrt, die Divergenz ist negativ. Im dritten Bild sind hinaus- und hinein weisende Pfeile genau gleich, die Divergenz ist daher Null.

S2) Versuchen Sie zu bestimmen, welches der Felder *wirbelfrei* ist.



Lösung: Alle drei Felder sind wirbelfrei. Konkret handelt es sich um die Felder $\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(y) \end{pmatrix}$, $\vec{F}_2 = \begin{pmatrix} \frac{x}{4} \\ \sin(y) \end{pmatrix}$ und $\vec{F}_3 = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$. Es ist oft schwer nur grafisch zu bestimmen, ob ein konservatives Feld vorliegt. Es kann hilfreich sein zu überlegen, ob auf bestimmten geschlossenen Wegen das Kurvenintegral verschwindet.

S3) Gegeben sei das Kraftfeld

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x^2 \\ y \end{pmatrix}$$

und die Wege

$$c_1: \quad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 2t^2 \end{pmatrix} \qquad\qquad c_2: \quad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 4t \end{pmatrix}$$

für $t \in [0;2]$. Berechnen Sie die beiden Linienintegrale $\int\limits_c \vec{F} d\vec{r}$.

Kann **nur mit diesem Ergebnis** eine Aussage über $\vec{F}$ gemacht werden? Begründung!

Lösung:
Linienintegral mit c_1:

$$I = \int\limits_0^2 \begin{pmatrix} 4t^2 \\ 2t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4t \end{pmatrix} dt = \int\limits_0^2 (8t^2 + 8t^3) dt = \left[\frac{8t^3}{3} + 2t^4 \right]_0^2 = \frac{64}{3} + 32 - 0 = \frac{160}{3}$$

Linienintegral mit c_2:

$$I = \int\limits_0^2 \begin{pmatrix} t^4 \\ 4t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2t \\ 4 \end{pmatrix} dt = \int\limits_0^2 (2t^5 + 16t) dt = \left[\frac{t^6}{3} + 8t^2 \right]_0^2 = \frac{64}{3} + 32 - 0 = \frac{160}{3}$$

Es kann keine besondere Aussage über $\vec{F}$ gemacht werden. Aus der Gleichheit zweier Integrale folgt noch nicht die Konservativität des Feldes.

S4) Es sei das dreidimensionale Kraftfeld

$$\vec{F} = \frac{mGM\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

mit den Konstanten $G = 6,67 \cdot 10^{-11} [\frac{m^3}{kg \cdot s^2}]$, $M = 5,96 \cdot 10^{24} [kg]$ und $m = 1[kg]$ gegeben.
Ein Körper wird in diesem Kraftfeld von $|\vec{r}| = R$ nach $|\vec{r}| \to \infty$ geschossen ($R = 6,4 \cdot 10^6 [m]$).
Ermitteln Sie die Arbeit

$$W = \int\limits_c \vec{F} d\vec{r}$$

auf zwei frei wählbaren Wegen von R nach ∞.
Begründen Sie, warum auf beiden Wegen die gleiche Arbeit geleistet wird.

Lösung: Wir können das Kraftfeld als Gravitationsfeld der Erde interpretieren. Von der Erdoberfläche wird ein Gegenstand ins Weltall abgeschossen, die dazu benötigte Arbeit ist in einem konservativen Feld wegunabhängig. Wir bestimmen die benötigte Arbeit zuerst entlang der $x-$Achse $\vec{r} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $t \in [R, \infty)$.

$$W = \int\limits_R^\infty \frac{mGM\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dt = mGM \int\limits_R^\infty \frac{1}{(t^2 + 0^2 + 0^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dt$$

$$= mGM \int\limits_R^\infty \frac{1}{t^2} dt = mGM \left[\frac{-1}{t} \right]_R^\infty = mGM(0 + 1/R) \approx 6,21 \cdot 10^7 [J]$$

Weitere einfache Wege sind alle Strahlen die radial ins Unendliche führen. Zu Übungszwecken berechnen wir die Arbeit auf dem spiralförmigen Kurs $\vec{r} = \begin{pmatrix} t\cos(t) \\ t\sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}$ $t \in [R, \infty)$.

$$\begin{aligned}
W &= mGM \int_R^\infty \frac{1}{t^3} \begin{pmatrix} t\cos(t) \\ t\sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(t) - t\sin(t) \\ \sin(t) + t\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} dt \\
&= mGM \int_R^\infty \left(\frac{1}{t^2} \left(\cos^2(t) - t\cos(t)\sin(t) + \sin^2(t) + t\cos(t)\sin(t)\right) \right) dt \\
&= mGM \int_R^\infty \left(\frac{1}{t^2} \cdot 1 \right) dt = mGM \left[\frac{-1}{t} \right]_R^\infty = mGM(0 + 1/R) \approx 6,21 \cdot 10^7 [J]
\end{aligned}$$

Die zu verrichtende Arbeit ist auf beiden Wegen die gleiche. Da es sich hier um ein konservatives Feld handelt, war das Ergebnis auch zu erwarten.

S5) Es sei das Feld

$$\vec{F}(x; y) = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Zeigen Sie, dass es sich bei $\vec{F}$ um ein *konservatives* Feld handelt.

b) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_c \vec{F} d\vec{r}$ mit $c : \vec{r} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ mit $t \in [0; 2\pi]$.

c) Lösen sie den durch a) und b) entstandenen Widerspruch auf![1]

Lösung:

a)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_1}{\partial y} &= \frac{-(x^2 + y^2) + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\
\frac{\partial F_2}{\partial x} &= \frac{(x^2 + y^2) - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}
\end{aligned}$$

Somit ist das Feld konservativ.

b)

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin^2(t) + \cos^2(t)} \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = [t]_0^{2\pi} = 2\pi$$

c) Geschlossene Linienintegrale verschwinden bei konservativen Feldern nur dann sicher, wenn das Integrationsgebiet *einfach zusammenhängend* ist. Wir haben im Punkt $(0; 0)$ aber eine Definitionslücke. Damit muss der Wert des Integrals nicht 0 ergeben.

[1] Der entscheidende Hinweis befindet sich im Skriptum bei Satz *3.4.19*!

S6) Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{H}(x;y;z) = \begin{pmatrix} x+yz \\ y+xz \\ z+xy \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie das Kurvenintegral über

a) die geradlinige Strecke von $(0;0;0)$ nach $(1;1;1)$.

b) die Kurve c mit Parametrisierung

$$c: \quad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} \qquad t \in [0;1]$$

c) den Streckenzug

$$(0;0;0) \to (1;0;0) \to (1;1;0) \to (1;1;1)$$

Lösung:

a)

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} \quad , t \in [0;1]$$

$$I = \int_0^1 \begin{pmatrix} t+t^2 \\ t+t^2 \\ t+t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 (3t+3t^2)dt = \left[\frac{3t^2}{2} + t^3\right]_0^1 = \frac{3}{2} + 1 - 0 = \frac{5}{2}$$

b)

$$I = \int_0^1 \begin{pmatrix} t+t^5 \\ t^2+t^4 \\ t^3+t^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 (t+t^5+2t^3+2t^5+6t^5)dt$$

$$= \left[\frac{t^2}{2} + \frac{t^6}{6} + \frac{t^4}{2} + \frac{t^6}{3} + t^6\right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + 1 - 0 = \frac{5}{2}$$

c)

$$\vec{r}_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{r}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{r}_3(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix} \quad , t \in [0;1]$$

$$I = \int_0^1 \begin{pmatrix} t+0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dt + \int_0^1 \begin{pmatrix} 1+0 \\ t+0 \\ 0+t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt + \int_0^1 \begin{pmatrix} 1+t \\ 1+t \\ t+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^1 t dt + \int_0^1 t dt + \int_0^1 (t+1)dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{t^2}{2} + t\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{2}$$

R1) Gegeben sei das konservative räumliche Vektorfeld

$$\vec{F}(x;y;z) = \begin{pmatrix} \sin(y) \\ x\cos(y) + \sin(z) \\ y\cos(z) \end{pmatrix}$$

i. Berechnen Sie die zugehörige Potentialfunktion $\Phi(x; y; z)$.

ii. Berechnen Sie mit Hilfe des vorher bestimmten Potentials das Integral $\int_c \vec{F} d\vec{r}$ für einen Weg von $(0; 0; 0)$ nach $(5; \pi; 3\pi)$.
Achtung: Es ist ausdrücklich das Potential ϕ zu verwenden!

Lösung:

a) Zur Bestimmung der Potentialfunktion berechnen wir das Integral

$$I: \quad \Phi(x; y; z) = \int \sin(y) dx = x \sin(y) + c_1(y, z)$$

Wir hätten auch mit jedem anderen anfangen können, die Wahl war willkürlich.
Wir haben somit eine Gleichungen für $\Phi(x; y; z)$ erhalten, wobei wir noch die Konstante $c_1(y, z)$ bestimmen müssen, die von zwei Variablen abhängig ist.
Wichtig ist festzuhalten, dass für das Potential $\Phi(x; y; z)$ gilt:

$$\vec{F}(x; y; z) = \begin{pmatrix} \sin(y) \\ x \cos(y) + \sin(z) \\ y \cos(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{0.1}$$

Als nächstes leiten wir unser Integral I von oben nach y ab.[2]

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = x \cos(y) + \frac{\partial c_1(y, z)}{\partial y}$$

Aus Gleichung (0.1) haben wir auch noch $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = x \cos(y) + \sin(z)$ und wir können folgern:

$$\begin{aligned} x \cos(y) + \sin(z) &= x \cos(y) + \frac{\partial c_1(y, z)}{\partial y} \\ \sin(z) &= \frac{\partial c_1(y, z)}{\partial y} \end{aligned}$$

Unbestimmte Integration nach y ergibt

$$y \sin(z) + c(z) = c_1(y, z)$$

Hier ist Entscheidendes passiert, denn $c(z)$ hängt nur noch von z ab!
Dieses Ergebnis setzen wir in I ein und sind fast am Ziel.

$$\Phi(x; y; z) = x \sin(y) + c_1(y, z) = x \sin(y) + y \sin(z) + c(z)$$

Um $c(z)$ zu bestimmen leiten wir diese Gleichung nach z ab und setzen sie mit der dritten Komponente aus Gleichung (0.1) gleich.

$$\begin{aligned} y \cos(z) &= y \cos(z) + c'(z) \\ 0 &= c'(z) \end{aligned}$$

Die Ableitung ist gleich 0, somit haben wir gezeigt, dass $c(z)$ tatsächlich nur eine reelle Zahl ist, also auch nicht von z abhängt. Das Potential lautet also

$$\Phi(x; y; z) = x \sin(y) + y \sin(z) + c \qquad , c \in \mathbb{R}$$

[2] Auch z würde funktionieren, die nachfolgenden Schritte ändern sich dann entsprechend.

Bemerkung:
Hat man diese Vorgehensweise verstanden, so kann leicht die Richtigkeit der folgenden "*quick and dirty*" Varianten überlegt werden. Dazu integrieren wir einfach alle drei Komponenten des Vektorfeldes.

$$\int \sin(y)dx = x\sin(y) + c_1(y;z)$$
$$\int (x\cos(y) + \sin(z))dy = x\sin(y) + y\sin(z) + c_2(x;z)$$
$$\int y\cos(z)dz = y\sin(z) + c_3(x;y)$$

Im ersten Integral fehlen jene Terme, die *nur* von y und z abhängen. Diese finden sich aber in den beiden anderen Integralen. Das gleiche Argument für die beiden anderen Integrale angewandt bedeutet, dass wir alle auftretenden Terme zusammenfassen müssen um die gesuchte Potentialfunktion $\Phi(x;y;z)$ zu erhalten.

$$\Phi(x;y;z) = x\sin(y) + y\sin(z) + c$$

b) Das Potential ist der analoge Begriff zur Stammfunktion im Reellen. Für konservative Felder, also genau jene, für die ein Potential existiert, kann das Kurvenintegral schnell berechnet werden.

$$\int\limits_c \vec{F}d\vec{r} = \Phi(5;\pi;3\pi) - \Phi(0;0;0) = (5\sin(\pi) + \pi\sin(3\pi)) - (0+0) = 0 - 0 = 0$$