

Mathematik 2

für technische Studiengänge

Thomas Hawel

7. März 2018

Vorwort

Das vorliegende Skriptum soll als Lern- und Übungsgrundlage dienen und die Vorlesungsbesucher zum großen Teil von Schreibarbeit befreien. Empfehlenswert ist das Hinzufügen von Notizen und Kommentaren, die das persönliche Verständnis fördern.

Die zahlreichen Abbildungen und durchgerechneten Beispiele sollen dem Leser einen möglichst anschaulichen Zugang ermöglichen. Es wurde an vielen Stellen auf die höchste mathematische Präzision verzichtet, um den notwendigen Formalismus nicht über Gebühr zu beanspruchen. Im Vordergrund stehen immer das Verstehen der Idee, sowie die Anwendung der Methode.

Es erübrigt sich fast zu bemerken, dass ein Skriptum niemals ein gutes Lehrbuch ersetzen kann und auch gar nicht den Anspruch darauf erhebt. Noch weniger kann es möglich sein, die aktive Teilnahme an der Vorlesung und das selbständige Bearbeiten der Übungsaufgaben, durch rein theoretische Lektüre zu kompensieren. Das eigenständige Ausarbeiten der Beispiele und Nachdenken, werden immer die zentralen Punkte eines erfolgreichen Studiums sein. Spätestens mit dem Erfolg wird auch die Freude kommen, die, vielleicht manchmal gut versteckt, in der Mathematik zu finden ist.

An dieser Stelle möchte ich mich ausdrücklich bei allen Studentinnen und Studenten bedanken, die durch ihre aktive Teilnahme an der Vorlesung, viele Fragen und zahlreiche Anmerkungen, maßgeblich die Qualität der Lehrveranstaltung positiv beeinflusst haben. Nur durch diese Zusammenarbeit konnten viele „Unebenheiten“, dieses Skriptums ausgemerzt werden. Besonders hervorzuheben sind in diesem Zusammenhang Frau *Christina Gold*, Frau *Brigitte Rudel* und Herr *Peter Schattovich*, die kontinuierlich wertvolle Beiträge lieferten.

Wiener Neustadt, im Juni 2017

Thomas Hawel

Inhaltsverzeichnis

1 Funktionen mehrerer Veränderlicher	5
1.1 Stetigkeit	7
1.2 Partielle Differenzierbarkeit	11
1.3 Die Richtungsableitung	13
1.4 Die Totale Ableitung	14
1.4.1 Herleitung der Tangentialebene	16
1.4.2 Das Totale Differenzial	18
1.4.3 Anwendungen des Totalen Differenzials	19
1.5 Zusammenfassung der Ableitungsbegriffe	22
1.6 Optimierungsaufgaben	25
1.7 Optimierung mit Nebenbedingungen	27
2 Mehrfachintegrale	31
2.1 Doppelintegrale	31
2.1.1 Integration bezüglich Polarkoordinaten	35
2.2 Dreifachintegrale	39
2.2.1 Zylinderkoordinaten	40
2.2.2 Kugelkoordinaten	41
2.3 Herleitung der Flächen- und Volumselemente	44
3 Vektoranalysis	47
3.1 Kurven in Ebene und Raum	47
3.2 Differenzialrechnung mit Kurven	49
3.2.1 Bogenlänge einer Kurve	52
3.2.2 Krümmung einer Kurve	54
3.3 Skalarfelder	59
3.3.1 Der Gradient	59
3.3.2 Linien- und Kurvenintegrale (erster Art)	64
3.4 Vektorfelder	67
3.4.1 Divergenz	68
3.4.2 Rotation	70
3.4.3 Spezielle Vektorfelder	72
3.4.4 Linien- und Kurvenintegrale (zweiter Art)	73
4 Gewöhnliche Differenzialgleichungen	78
4.1 Einleitung	78
4.2 Anfangswertprobleme (AWP)	80
4.3 Randwertprobleme (RWP)	81
4.4 Differenzialgleichungen erster Ordnung	83
4.4.1 Trennung der Variablen	83
4.4.2 Substitutionsmethode	86
4.5 Lineare Differenzialgleichungen erster Ordnung	88
4.5.1 Variation der Konstanten	88
4.5.2 Methode der partikulären Lösung	89
4.6 Lineare Differenzialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten	91
4.6.1 Homogene DGL	91
4.6.2 Inhomogene DGL	93

4.7	Systeme linearer Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	95
4.7.1	Homogene Gleichungssysteme	95
4.7.2	Inhomogene Gleichungssysteme	101
4.7.3	Anwendungsbeispiele	103
4.7.4	Trajektorien und Phasendiagramm	109
5	Fourier-Reihen	111
5.1	Einleitung	111
5.2	Entwicklung einer periodischen Funktion in eine Fourier-Reihe	113
5.3	Komplexe Darstellung der Fourier-Reihe	117
5.4	FMM - Frequently made mistakes	121
5.4.1	Ausnutzen der Symmetrie	121
5.4.2	Gültigkeitsbereich der gegebenen Funktion	121
5.5	Fourierreihen unter der Lupe	123
6	Fourier-Transformation	127
6.1	Grundlagen	127
6.2	Inverse Fourier-Transformation	131
6.3	Zusammenhang reeller und komplexer Darstellung	132
6.4	Wichtige verallgemeinerte Funktionen	133
6.4.1	Die Sigmafunktion $\sigma(t)$	133
6.4.2	Rechteck-Impulse	135
6.4.3	Die Diracsche Deltafunktion	136
6.4.4	Zusammenhang zwischen Deltafunktion und Sigmafunktion	140
6.5	Transformationssätze	142
6.5.1	Linearitätssatz	142
6.5.2	Ähnlichkeitssatz	142
6.5.3	Verschiebungssatz	143
6.5.4	Dämpfungssatz	143
6.5.5	Ableitungssätze	144
6.5.6	Integrationssatz	146
6.5.7	Faltungssatz	146
6.5.8	Vertauschungssatz	148
6.6	Anwendungen der Fourier-Transformation	150
7	Laplace-Transformation	153
7.1	Transformationssätze	156
7.2	Laplace Transformation periodischer Funktionen	157
7.3	Anwendungen der Laplace-Transformation	161
8	Numerisches Lösen von Differenzialgleichungen	166
8.1	Numerische Integration einer DGL 1.Ordnung	166
8.1.1	Streckenverfahren nach Euler	166
8.1.2	Runge-Kutta-Verfahren 4.Ordnung	168
9	Radon Transformation	173
9.1	Mathematische Beschreibung	174
9.2	Inverse Radon Transformation	176
	Index	178

1 Funktionen mehrerer Veränderlicher

Funktionen die von mehr als einer unabhängigen Variable abhängen treten vielfach in Anwendungen auf. Selbst so einfache Dinge, wie etwas der Flächeninhalt eines Rechtecks (Länge a , Breite b) stellt ein solches Beispiel dar.

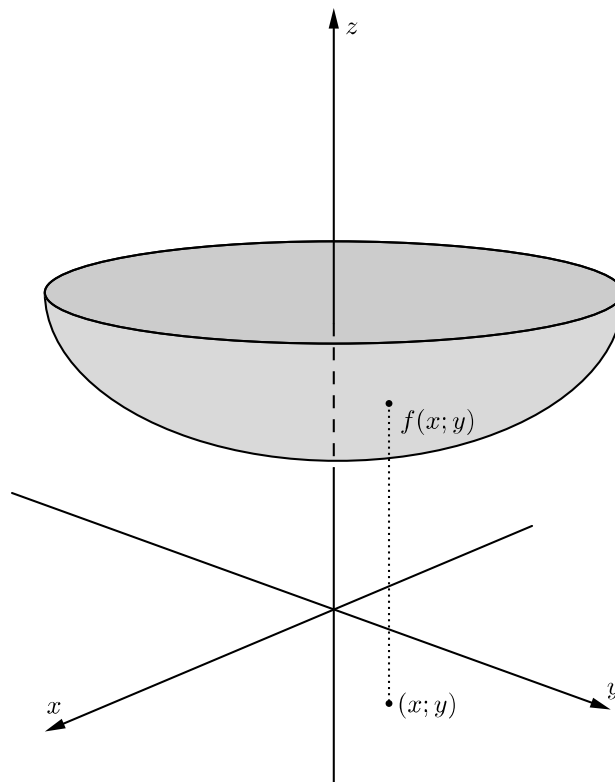
$$A_{\square} = A_{\square}(a; b) = a \cdot b$$

Im weiteren Verlauf werden wir uns fast ausschließlich mit Funktion beschäftigen, die von zwei Variablen abhängen.

$$f(x, y) : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ (x; y) \mapsto f(x; y) \end{cases}$$

Geometrisch gesehen wird einem Punkt aus der $(x; y)$ -Ebene eine Höhe zugeordnet. Es wird daher auch oft statt $f(x; y)$ die Bezeichnung $z(x; y)$ verwendet, um den üblichen Koordinatenbezeichnungen x, y und z Rechnung zu tragen.

Zeichnen wir den Graphen von $f(x; y)$, so sehen wir eine Fläche im dreidimensionalen Raum. Solche Abbildungen tragen auch den Namen *Flächenfunktionen*.



Bemerkung 1.0.1. Obwohl wir unser Schaubild im dreidimensionalen Anschauungsraum zeichnen, sind diese Funktionen nicht im \mathbb{R}^3 beheimatet. Es handelt sich immer noch um Abbildungen vom \mathbb{R}^2 in die reellen Zahlen \mathbb{R} .

Beispiel 1.0.2. Definitions- und Wertebereiche.

a) $f(x; y) = z(x; y) = 2x + y + 5$

Der Definitionsbereich D dieser Funktion ist die ganze Ebene $D = \mathbb{R}^2 = \{(x; y) : x, y \in \mathbb{R}\}$. Es können problemlos alle Werte eingesetzt werden.

Der Wertebereich W der Funktion ist ganz \mathbb{R} , sie ist weder nach oben noch nach unten beschränkt.

b) $f(x; y) = x^2 + y^2$

$D = \mathbb{R}^2$, alle Werte dürfen eingesetzt werden.

$W = \mathbb{R}^+$, die Funktion liefert nur positive Werte.

c) $f(x; y) = \sqrt{25 - (x^2 + y^2)}$

Der Radikant muss positiv sein, wir betrachten also die Ungleichung $25 - (x^2 + y^2) \geq 0$ etwas näher. Umgeformt zu $25 \geq x^2 + y^2$ sehen wir leichter, dass es sich um eine Kreisscheibe mit $M(0; 0)$ und $r = 5$ handelt.

Die Funktion ist also nur innerhalb dieses Kreises definiert: $D = \{(x; y) : x^2 + y^2 \leq 25\}$

Der Wertebereich ist ebenfalls interessant, denn dieser ist nach oben und unten beschränkt.

Der Wurzelausdruck wird für $(x; y) = (0; 0)$ maximal, das entspricht dem Kreismittelpunkt.

Am Rand des Kreises gilt $x^2 + y^2 = 25$, dort wird die Funktion gleich 0.

$W = \{z \in \mathbb{R} : 0 \leq z \leq 5\}$

Wir unterscheiden zwischen zwei Darstellungsformen von Funktionen, der **expliziten-** und der **impliziten** Darstellung. Eine Funktion liegt in expliziter Darstellung vor, wenn sie als Gleichung der Form

$$z = f(x; y)$$

geschrieben ist. Sie liegt implizit vor, wenn sie in der Form

$$F(x; y; z) = 0$$

gegeben ist.

Beispiel 1.0.3.

$$z = 2x + y + 3 \quad (\text{explizit})$$

$$z = \sin(x^2) \cdot \sqrt{y} \quad (\text{explizit})$$

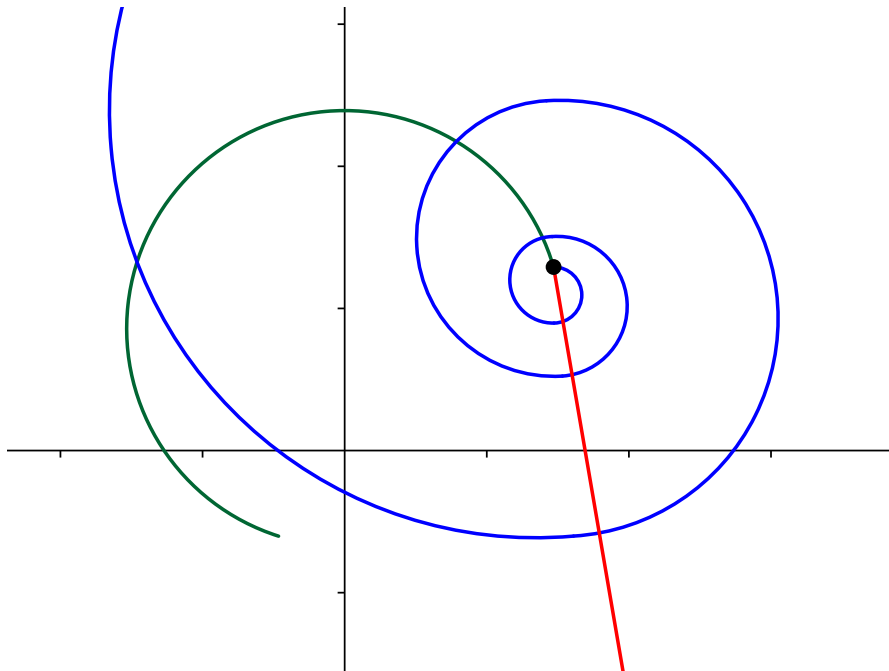
$$0 = x^2 + y^2 - z + 1 \quad (\text{implizit})$$

$$0 = \sin(x \cdot y) + 4z + 1 \quad (\text{implizit})$$

Bemerkung 1.0.4. Gleichungen wie z.B. $z^2 - y^2 + 3xy = 0$ stellen überhaupt keine Funktion dar, denn sie ist nicht eindeutig nach z auflösbar.

1.1 Stetigkeit

Der Begriff der Stetigkeit ist in mehreren Dimensionen ebenso fundamental und wichtig wie in der eindimensionalen Analysis. Der entscheidende Unterschied liegt darin, dass nicht nur rechts- und linksseitige Grenzwerte betrachtet werden können, sondern in der xy -Ebene unendlich viele Wege zu einem Punkt führen können.



Im oben dargestellten Bild, wird der schwarze Punkt von drei unterschiedlichen Wegen (rot, blau, grün), aus verschiedenen Richtungen erreicht. Die folgende Definition beschreibt formal, dass der Funktionswert einer stetigen Funktion nicht vom Weg abhängen darf.

Definition 1.1.1. Eine in $(x_0; y_0)$ und einer Umgebung von $(x_0; y_0)$ definierte Funktion $z = f(x; y)$ heißt an der Stelle $(x_0; y_0)$ *stetig*, wenn der Grenzwert der Funktion an dieser Stelle existiert und dort mit $f(x_0; y_0)$ übereinstimmt.

$$\lim_{(x;y) \rightarrow (x_0;y_0)} f(x; y) = f(x_0; y_0)$$

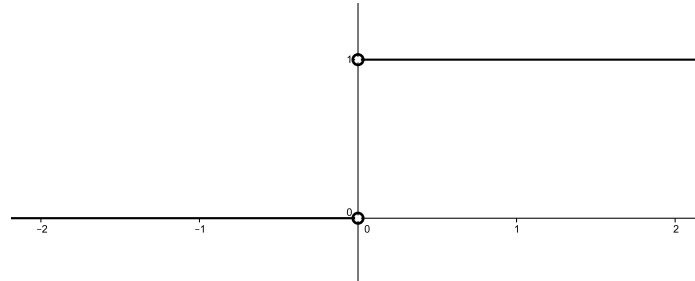
Ist $f(x; y)$ in jedem Punkt des Definitionsbereichs stetig, so nennen wir $f(x; y)$ eine *stetige Funktion*.

Wir geben Beispiele an, die den Begriff der Stetigkeit verdeutlichen sollen. Auch wenn einige der folgenden Funktionen nur von einer Variable abhängen, so ist die Stetigkeitsdefinition analog gültig. In \mathbb{R} gibt es zwei Richtungen, aus denen man sich einer Zahl x_0 nähern kann.¹

¹von oben ↘, oder von unten ↗

Beispiel 1.1.2. Heaviside-Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$

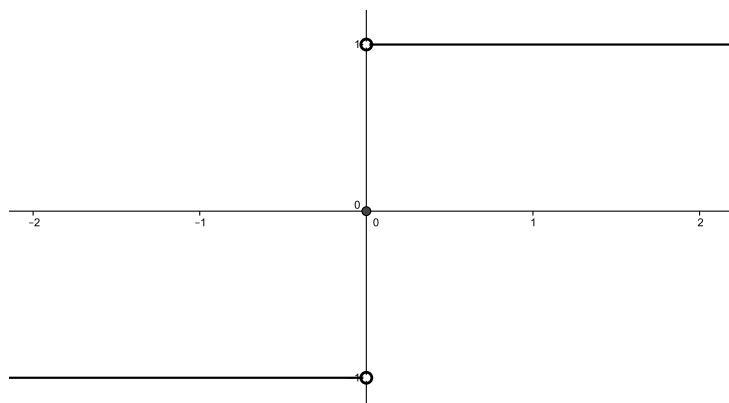


Die Funktion $f(x)$ ist auf $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definiert und dort entweder konstant $+1$ oder 0 . Für jeden Punkt $x_0 \in D$ existiert auch eine Umgebung (Intervall) um x , das ganz in D enthalten ist. Dort ist $f(x)$ konstant und somit existiert der Grenzwert $\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = \lim_{x \searrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Er ist entweder $+1$ oder 0 , insgesamt ist die Stetigkeit von $f(x)$ gezeigt.

Bemerkung 1.1.3. Es ist ein großer Irrtum diese Funktion im Punkt $x_0 = 0$ als unstetig zu bezeichnen, zumindest wenn man Definition 1.1.1 verwendet. Dort wird eindeutig verlangt, dass die Funktion im betrachteten Punkt definiert sein muss, um überhaupt von Stetigkeit sprechen zu können. Da aber im obigen Beispiel der Punkt $x_0 = 0$ nicht in der Definitionsmenge liegt, macht es auch keinen Sinn, Eigenschaften wie Stetigkeit zu untersuchen. Es gibt die Funktion dort überhaupt nicht. Leider werden in manchen Büchern solche Definitionslücken auch als Unstetigkeitsstellen bezeichnet, eine Sichtweise die vom Autor (und nicht nur dem) nicht geteilt wird.

Beispiel 1.1.4. Signum-Funktion

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \\ -1 & , x < 0 \end{cases}$$



Diese Funktion liefert das Vorzeichen einer reellen Zahl und ist auch auf ganz \mathbb{R} definiert. Hier

gilt, im Gegensatz zum vorigen Beispiel, dass im Punkt $x_0 = 0$ die folgenden Grenzwerte nicht übereinstimmen.

$$\begin{aligned}\lim_{x \nearrow 0} f(x) &= -1 \\ \lim_{x \searrow 0} f(x) &= +1 \\ f(0) &= 0\end{aligned}$$

Hier stimmen weder die Richtungsgrenzwerte, noch der Funktionswert überein, diese Funktion ist also mit Sicherheit unstetig im Punkt $x_0 = 0$.

Bemerkung 1.1.5. Die leider häufig verwendete Beschreibung, dass eine Funktion stetig sei, wenn man sie „in einem Strich durchzeichnen“ kann, ist ebenso irreführend wie sinnlos. Es ist z.B. $f(x) = \frac{1}{x}$ differenzierbar und somit sicher stetig, aber nicht durchgehend zeichnenbar.

Beispiel 1.1.6.

$$f(x; y) = \begin{cases} \frac{4xy}{x^2 + y^2} & , (x; y) \neq (0; 0) \\ 0 & , (x; y) = (0; 0) \end{cases}$$

Als Zusammensetzung (Komposition) stetiger Funktionen ist $f(x; y)$ sicher überall in $(x; y) \neq (0; 0)$ stetig. Die einzig kritische Stelle ist der Ursprung, dem wir uns auf zwei verschiedenen Wegen nähern werden.

Weg entlang der positiven x -Achse $y = 0$:

$$\lim_{(x; y) \rightarrow (0; 0)} f(x; y) = \lim_{(x; 0) \rightarrow (0; 0)} f(x; 0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x; 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x \cdot 0}{x^2 + 0^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$$

Dieser Weg führt auch zum Funktionswert der Definition, noch haben wir keinen Hinweis auf Unstetigkeit.

2. Weg entlang der Diagonalen $y = x$:

$$\lim_{(x; y) \rightarrow (0; 0)} f(x; y) = \lim_{(x; x) \rightarrow (0; 0)} f(x; x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x; x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x \cdot x}{x^2 + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2}{2x^2} = 2$$

Dieser Weg führt zu einem anderen Funktionswert, die Funktion ist also im Ursprung unstetig.

Um die Unstetigkeit einer Funktion zu zeigen reicht es einen Weg zu finden, der zu einem Funktionswert $f(x) \neq f(x_0)$ führt.

Die Stetigkeit einer Funktion nachzuweisen ist dagegen oft deutlich schwieriger, da man schwer *alle* Wege durchprobieren kann. Hier helfen oft nur alternative Charakterisierungen der Stetigkeit (wie z.B. die $\varepsilon\delta$ -Definition) weiter.

Manchmal gelingt es zu zeigen, dass der Grenzwert tatsächlich unabhängig vom eingeschlagenen Weg ist, indem Polarkoordinaten verwendet werden. Wir werden ein solches Beispiel angeben, eine Garantie auf Erfolg liefert diese Vorgehensweise aber auch nicht, da die auftretenden Grenzwerte nicht immer leicht zu berechnen sind.

Beispiel 1.1.7.

$$f(x; y) = \begin{cases} \frac{x^2 e^y + y^2 \cos(x)}{x^2 + y^2} & , (x; y) \neq (0; 0) \\ 1 & , (x; y) = (0; 0) \end{cases}$$

Einsetzen von Polarkoordinaten zeigt, dass der Grenzwert nicht mehr vom Winkel φ abhängt:

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 \cos(\varphi)^2 e^{r \sin(\varphi)} + r^2 \sin(\varphi)^2 \cos(r \cos(\varphi))}{r^2} &= \\ \lim_{r \rightarrow 0} \left(\cos(\varphi)^2 \underbrace{e^{r \sin(\varphi)}}_{\rightarrow 1} + \sin(\varphi)^2 \underbrace{\cos(r \cos(\varphi))}_{\rightarrow 1} \right) &= \\ \cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2 &= 1 \end{aligned}$$

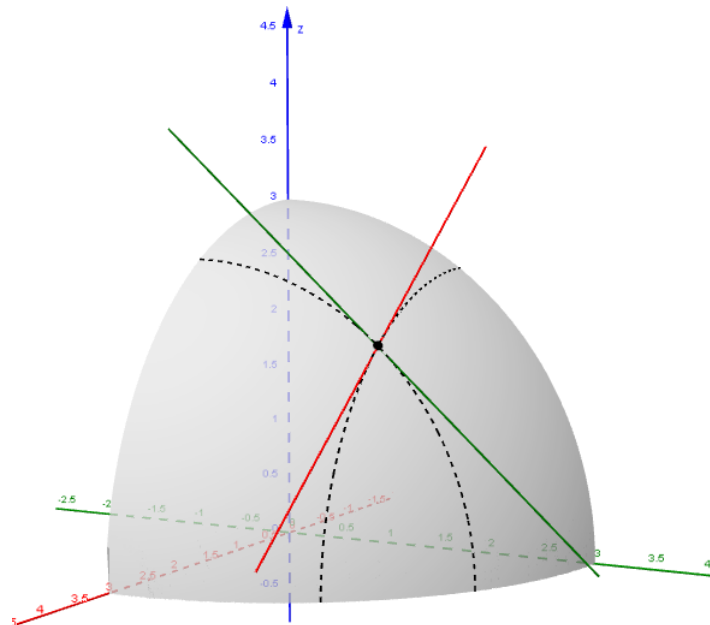
In diesem Beispiel spielt der Winkel φ keine Rolle für den Grenzwert des Funktionswerts, es ist also tatsächlich egal auf welchem Weg ich mich dem Ursprung nähere. Damit ist die Stetigkeit der Funktion gezeigt.

Bemerkung 1.1.8. Der Winkel φ muss nicht unbedingt komplett aus der Rechnung verschwinden. Der Ausdruck $r \cdot \cos(\varphi)$ strebt für $r \rightarrow 0$ auch sicher gegen 0 weil $\cos(\varphi)$ beschränkt bleibt.

1.2 Partielle Differenzierbarkeit

Aus den selben Gründen wie bei der Stetigkeit, ist die Differenzierbarkeit einer Funktion in mehreren Veränderlichen deutlich komplexer. Anschaulich besteht nicht nur die Möglichkeit *die* Tangente an einen Funktionsgraph zu legen, es existieren prinzipiell unendlich viele Tangenten.

Zwei Tangenten sind jedoch sehr naheliegend, jene die parallel zur x - bzw. y -Achse liegen.



Die Abbildung zeigt zwei Schnitte durch die Fläche (strichliert), einen parallel zur x - und einen parallel zur y -Achse. Im Schnittpunkt sind die beiden angesprochenen Tangenten gelegt worden.

Definition 1.2.1. *Existieren die beiden Grenzwerte*

$$f_x(x; y) := \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x; y) - f(x; y)}{\Delta x}$$

$$f_y(x; y) := \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x; y + \Delta y) - f(x; y)}{\Delta y}$$

dann nennen wir die Funktion $f(x; y)$ **partiell differenzierbar** und f_x, f_y die (ersten) partiellen Ableitungen.

Folgende Schreibweisen sind gebräuchlich:

$$f_x(x; y) = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f(x; y)}{\partial x}$$

Die partiellen Ableitungen werden berechnet, indem die jeweils anderen Variablen *konstant* gehalten werden. Damit kann auf die schon bekannten Differenzierungsregeln zurückgegriffen werden.

Auch können höhere Ableitungen gebildet werden, wie am folgenden Beispiel gezeigt wird.

Beispiel 1.2.2. Wir berechnen die partiellen Ableitungen der Funktion $f(x; y) = 4x^3y^2 - 5x +$

$9y - 7$ bis zur zweiten Ordnung.

$$\begin{aligned} f_x &= 12x^2y^2 - 5 & f_y &= 8x^3y + 9 \\ f_{xx} &= 24xy^2 & f_{yy} &= 8x^3 \\ f_{xy} &= 24x^2y & f_{yx} &= 24x^2y \end{aligned}$$

Die beiden Ableitungen f_{xy} und f_{yx} stimmen nicht nur zufällig überein. Diese Gleichheit folgt aus dem Satz von Schwarz².

Satz 1.2.3. (von Schwarz): *Sind alle partiellen Ableitungen k -ter Ordnung einer Funktion stetig, so darf die Reihenfolge der partiellen Differenziation vertauscht werden.*

Wir verwenden für höhere Ableitungen die Notation

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

Beispiel 1.2.4. Wir berechnen alle zweiten Ableitungen von $f(x; y) = \frac{x - y}{x + y}$

$$f_x = \frac{(x + y) - (x - y)}{(x + y)^2} = \frac{2y}{(x + y)^2}$$

$$f_y = \frac{-(x + y) - (x - y)}{(x + y)^2} = \frac{-2x}{(x + y)^2}$$

$$f_{xx} = 2y \cdot (-2)(x + y)^{-3} = \frac{-4y}{(x + y)^3}$$

$$f_{yy} = -2x \cdot (-2)(x + y)^{-3} = \frac{4x}{(x + y)^3}$$

$$f_{xy} = \frac{2(x + y)^2 - 2y \cdot 2(x + y)}{(x + y)^4} = \frac{2x - 2y}{(x + y)^3}$$

$$f_{yx} = f_{xy}$$

²nach Hermann Amandus Schwarz (1843-1921)

1.3 Die Richtungsableitung

Partielle Ableitungen liefern das Änderungsverhalten einer Funktion parallel zu den Koordinatenachsen. Es ist eine natürliche Erweiterung des Ableitungsbegriffs beliebige Richtung zu betrachten.

Definition 1.3.1. Für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist die *Richtungsableitung* im Punkt \vec{x} entlang \vec{v} definiert als der Grenzwert

$$f'_{\vec{v}}(\vec{x}) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x} + h \cdot \vec{v}) - f(\vec{x})}{h \cdot |\vec{v}|},$$

falls dieser existiert.

Die Vektorpfeile werden oft weggelassen wenn keine Verwechslungsgefahr besteht. Der Term $|\vec{v}|$ im Nenner normiert den Vektor \vec{v} , die Ableitung ist somit nicht mehr von der Länge des Richtungsvektors abhängig. Wir werden im Kapitel *Vektoranalysis* noch einmal auf die Richtungsableitung zu sprechen kommen. Die folgende kurze Rechnung zeigt, dass unsere Definition wirklich den Vektor \vec{v} normiert. Setzen wir $h_1 = h \cdot |\vec{v}|$ so gilt:

$$f'_{\vec{v}}(\vec{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x} + h \cdot \vec{v}) - f(\vec{x})}{h \cdot |\vec{v}|} = \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x} + \frac{h_1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v}) - f(\vec{x})}{h_1} = \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x} + h_1 \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}) - f(\vec{x})}{h_1}$$

Beispiel 1.3.2. Sei $f(x; y) = f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = x^2 + y^2$ gegeben. Wir suchen die Richtungsableitung im Punkt $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ in Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} f'_v &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\begin{pmatrix} x + h \cdot 1 \\ y + h \cdot 1 \end{pmatrix}\right) - f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)}{h \cdot \sqrt{2}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x + h)^2 + (y + h)^2 - (x^2 + y^2)}{h \cdot \sqrt{2}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2 + 2yh + h^2}{h \cdot \sqrt{2}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2}} (2x + 2y + 2h) = \frac{1}{\sqrt{2}} (2x + 2y) \end{aligned}$$

Setzen wir für $(x; y)$ einen konkreten Punkt ein, so erhalten wir den Anstieg der Funktion in diesem Punkt in Richtung \vec{v} . Im Punkt $P(3; 2)$ hat die Funktion in Richtung \vec{v} somit den Anstieg $f'_v = \frac{1}{\sqrt{2}}(2 \cdot 3 + 2 \cdot 2) = 5\sqrt{2}$.

Bemerkung 1.3.3. Für die Einheitsvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ entsprechen die Richtungsableitungen genau den partiellen Ableitungen.

1.4 Die Totale Ableitung

Möchte man die komplette Information des Änderungsverhaltens einer Funktion fassen, so wird die *Totale Ableitung* verwendet. Um zu verstehen welche Idee hinter diesem Begriff steckt, betrachten wir noch einmal die Ableitung einer Funktion in einer Variablen.

Oft wird beim Differenzieren der Funktion $f(x)$ betont, dass die Steigung der Funktion berechnet werden soll. Ein anderer, hier wesentlich wichtigerer Aspekt ist jener, dass die Funktion in einem Punkt durch eine *lineare Funktion* $L(x)$ angenähert werden soll. Wir sprechen dabei von der *Linearisierung* einer Funktion. Wir betrachten in einer sehr kleinen Umgebung eines Punktes der Funktion nicht mehr die Funktion $f(x)$ selbst, sondern nur die dort gelegte Tangente (=lineare Näherung).

Aus der Definition der Ableitung

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

erhalten wir eine Näherungsformel für die Funktion $f(x)$:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Auf der rechten Seite steht eine linear(affine) Funktion, wir approximieren $f(x)$ also durch eine lineare Funktion.

Durch Weglassen der Grenzwertbildung entsteht ein Fehler, den wir $r(x)$ nennen. Es gilt Gleichheit, wenn dieser Fehler berücksichtigt wird:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + r(x - x_0)$$

Setzen wir $h = x - x_0$, erhalten wir

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + r(h) \quad (1.1)$$

wobei der Fehlerterm $r(h)$ schneller als linear gegen 0 strebt, d.h. $\frac{r(h)}{|h|} \rightarrow 0$ für $|h| \rightarrow 0$. Diese Bedingung muss gefordert werden, damit $f'(x_0)$ auch wirklich als Grenzwert des Differenzenquotienten gesehen werden kann:

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= f'(x_0) + \frac{r(h)}{h} \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= f'(x_0) + 0 \end{aligned}$$

Die Idee der linearen Approximierung lässt sich auch auf höhere Dimensionen übertragen.

Definition 1.4.1. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt *total differenzierbar* im Punkt \vec{x}_0 , falls eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und eine Funktion $r(\vec{h})$ existieren, sodass sich f bis auf den Fehler $r(\vec{h})$ durch L approximieren lässt.

$$f(\vec{x}_0 + \vec{h}) = f(\vec{x}_0) + L(\vec{h}) + r(\vec{h}) \quad (1.2)$$

Es muss dabei $\frac{r(\vec{h})}{|\vec{h}|} \rightarrow \vec{0}$ für $|\vec{h}| \rightarrow 0$ gelten.

Bemerkung 1.4.2.

- Die lineare Abbildung $L(\vec{h})$ heißt **Totale Ableitung** von f im Punkt \vec{x}_0 . Falls sie existiert, dann besteht die Darstellungsmatrix aus den partiellen Ableitungen der Funktion. Diese Matrix wird Jacobi-Matrix³ von f genannt.
- Für $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt $L(h) = \underbrace{f'(x_0)}_{\in \mathbb{R}} \cdot h$.

³Benannt nach Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851)

Beispiel 1.4.3. Der Begriff der Totalen Ableitung bereitet am Anfang oft etwas Probleme. Dieses Beispiel soll die Verallgemeinerung des Ableitungsbegriffs illustrieren. Wir betrachten drei verschiedene Funktionen und deren Ableitungen.

- $f(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Für Funktionen einer unabhängigen Variablen kennen wir das Ergebnis schon aus der üblichen Differenzialrechnung.

$$f(x+h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + r(h)$$

Die Ableitung $f'(x_0)$ ist eine reelle Zahl, geometrisch gedeutet die Steigung der Tangente an den Funktionsgraphen. Die Zahl $f'(x_0)$ könnte man auch als Matrix L interpretieren, die nur einen einzigen Eintrag (die Steigung) hat.

Zum Beispiel für $f(x) = x^2$ an der Stelle $x_0 = 3$:

$$f'(x) = 2x \quad f'(x_0) = 6 \quad f(x+h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + r(h) = 9 + \underbrace{6h}_{=L(h)} + r(h)$$

- $f(\vec{x}) = f(x; y): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Hier muss die lineare Abbildung $L(\vec{h})$ vom \mathbb{R}^2 in die reellen Zahlen \mathbb{R} abbilden. Die Darstellungsmatrix von $L(\vec{h})$ hat daher eine Zeile und zwei Spalten.

Zum Beispiel für $f(x; y) = x^2 + y$ an der Stelle $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$:

$$f_x = 2x \quad f_y = 1 \quad f_x(\vec{x}_0) = 2 \quad f_y(\vec{x}_0) = 1$$

Die Matrix L enthält die partiellen Ableitungen der Funktion und lautet daher

$$L = (f_x(\vec{x}_0) \quad f_y(\vec{x}_0)) = (2 \quad 1)$$

Insgesamt erhalten wir die Gleichung

$$f(\vec{x} + \vec{h}) = 3 + \underbrace{(2 \quad 1) \vec{h}}_{=L(\vec{h})} + r(\vec{h})$$

- $f(\vec{x}): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Wir gehen analog zu den anderen Beispielen vor und bestimmen die Jacobi-Matrix, d.h. die Darstellungsmatrix der linearen Funktion $L(\vec{h})$. Diesmal handelt es sich um eine 2×2 -Matrix.

Die betrachtete Funktion lautet $f(\vec{x}) = f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x^2 + y \\ xy \end{pmatrix}$ an der Stelle $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Die einzelnen Komponenten der Funktion $f(\vec{x})$ bezeichnen wir mit f_1 und f_2 .

$$\begin{aligned} f_{1x} &= 4x & f_{1y} &= 1 \\ f_{2x} &= y & f_{2y} &= x \end{aligned}$$

Die Matrix L hat die Gestalt

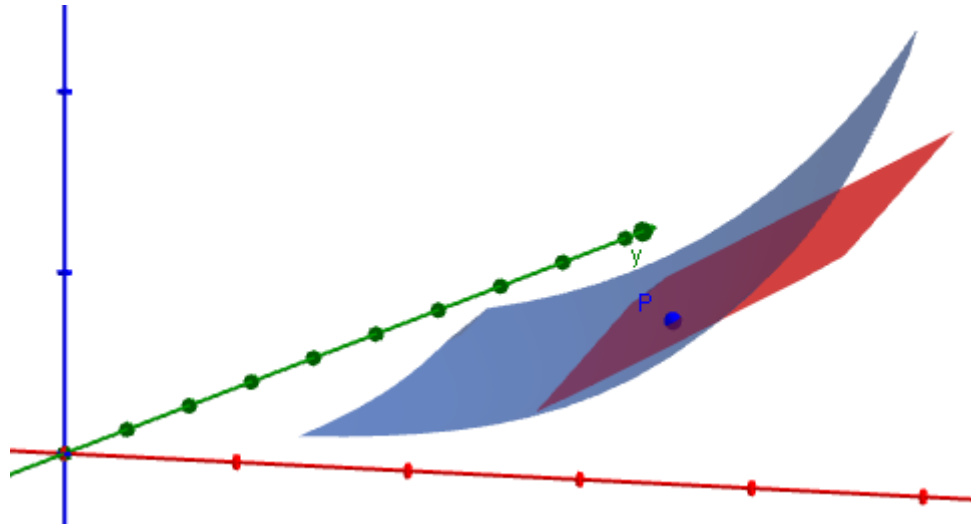
$$L = \begin{pmatrix} f_{1x}(\vec{x}_0) & f_{1y}(\vec{x}_0) \\ f_{2x}(\vec{x}_0) & f_{2y}(\vec{x}_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Die Funktionsgleichung (1.2) der Totalen Ableitung lautet

$$f(\vec{x} + \vec{h}) = \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \vec{h}}_{=L(\vec{h})} + r(\vec{h})$$

Wir werden uns vorerst auf Funktionen der Art $f(\vec{x}) = f(x; y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ beschränken. Die Graphen der linearen Abbildungen sind in diesem Fall *Ebenen* durch den Ursprung. Die Linearisierung einer Funktion im Punkt $\vec{x}_0 = (x_0; y_0)$ besteht geometrisch aus dem Legen der *Tangentialebene* an den Funktionsgraph.

1.4.1 Herleitung der Tangentialebene



Sei $f(x; y)$ und ein Punkt $P(x_0; y_0; f(x_0; y_0))$ gegeben. Wir setzen die Ebenengleichung ganz allgemein an.

$$\varepsilon : z(x; y) = ax + by + c$$

In der gesuchten Tangentialebene liegen *alle* Tangenten, so auch jene, die parallel zur x - und y -Achse verlaufen. Als Konsequenz daraus erhalten wir die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial x} = a \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial y} = b \end{aligned}$$

Es fehlt noch ein Ausdruck für den Koeffizienten c , den erhalten wir aus der Tatsache, dass der Punkt P in der Ebene liegt.

$$\begin{aligned} z_0 &= ax_0 + by_0 + c = f_x x_0 + f_y y_0 + c \\ c &= z_0 - f_x x_0 - f_y y_0 \end{aligned}$$

Einsetzen von a, b und c in ε liefert die allgemeine Tangentialebenengleichung

$$\mathbf{z} - \mathbf{z}_0 = \mathbf{f}_x(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathbf{f}_y(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) \quad (1.3)$$

Beispiel 1.4.4. Wir linearisieren die Funktion $f(x; y) = x^2 \cdot e^{xy}$ im Punkt $P(1; 0; 1)$. Die farbige Darstellung soll helfen die verwendeten Zahlen besser zuordnen zu können.

$$\begin{aligned} f_x &= e^{xy} \cdot (2x + x^2 y) \\ f_y &= x^3 \cdot e^{xy} \end{aligned}$$

Einsetzen in Gleichung (1.3):

$$\begin{aligned} z - 1 &= 2(x - 1) + (y - 0) \\ z(x; y) &= 2x + 1y - 1 \end{aligned}$$

Damit wäre die beste lineare Approximation der Funktion im Punkt P gefunden. Um herauszustrichen, wo die lineare Abbildung $L(\vec{h})$ aus Definition 1.2 auftritt, schreiben wir noch explizit die Gleichung der Totalen Ableitung an.

$$f\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix}}_{=f(\vec{x}_0+\vec{h})}\right) = \underbrace{1}_{f(\vec{x}_0)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix}}_{L(\vec{h})} + r \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix}$$

Hier wurde Definition 1.2 verwendet, und die Darstellung von $L(\vec{h})$ als (1×2) -Matrix. Wir zeigen noch, dass der Fehler $r(\vec{h})$ tatsächlich stärker als linear gegen 0 strebt für $|\vec{h}| \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} \lim_{|\vec{h}| \rightarrow 0} \frac{r(\vec{h})}{|\vec{h}|} &= \lim_{|\vec{h}| \rightarrow 0} \frac{(1 + h_x)^2 e^{(1+h_x)h_y} - 1 - 2h_x - h_y}{|\vec{h}|} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{(1 + r \cos(\varphi))^2 e^{r \sin(\varphi) + r^2 \cos(\varphi) \sin(\varphi)} - 1 - 2r \cos(\varphi) - r \sin(\varphi)}{r} \end{aligned}$$

Für $r \rightarrow 0$ erhalten wir einen Ausdruck der Form $\frac{0}{0}$, daher wenden wir die Regel von *De L'Hospital* an.

$$\begin{aligned} &\lim_{r \rightarrow 0} (2(1 + r \cos(\varphi)) \cos(\varphi) e^{r \sin(\varphi) + r^2 \cos(\varphi) \sin(\varphi)} \\ &\quad + (1 + r \cos(\varphi))^2 e^{r \sin(\varphi) + r^2 \cos(\varphi) \sin(\varphi)} \cdot (\sin(\varphi) + 2r \cos(\varphi) \sin(\varphi)) \\ &\quad - 0 - 2 \cos(\varphi) - \sin(\varphi)) \\ &= 2(1 + 0) \cos(\varphi) e^{0+0} + (1 + 0)^2 e^{0+0} \cdot (\sin(\varphi) + 0) - 2 \cos(\varphi) - \sin(\varphi) = 0 \end{aligned}$$

Damit haben wir die totale Differenzierbarkeit der Funktion $f(x; y) = x^2 \cdot e^{xy}$ gezeigt. Die berechnete Tangentialebene stellt tatsächlich die beste lineare Approximation dar.

Beispiel 1.4.5. Wir betrachten die Funktion

$$f(x; y) = \begin{cases} \frac{x^3 y^3}{x^2 + y^2} & , (x; y) \neq (0; 0) \\ 0 & , (x; y) = (0; 0) \end{cases}$$

Wir werden zeigen, dass

- die partiellen Ableitungen im Ursprung existieren und sie berechnen.
- $f(x; y)$ im Ursprung total differenzierbar ist.

Die partiellen Ableitungen berechnen wir über die Definition.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(0;0)}{\partial x} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h;0) - f(0;0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0 \\ \frac{\partial f(0;0)}{\partial y} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0;h) - f(0;0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0\end{aligned}$$

Also ist $f(x; y)$ im Ursprung partiell differenzierbar mit verschwindenden Ableitungen.

Falls $f(x; y)$ auch total differenzierbar im Ursprung ist, so muss die lineare Abbildung $L(h_x, h_y)$ gleich der Jacobi-Matrix sein. In unserem Fall handelt es sich dabei um eine einzeilige Nullmatrix.

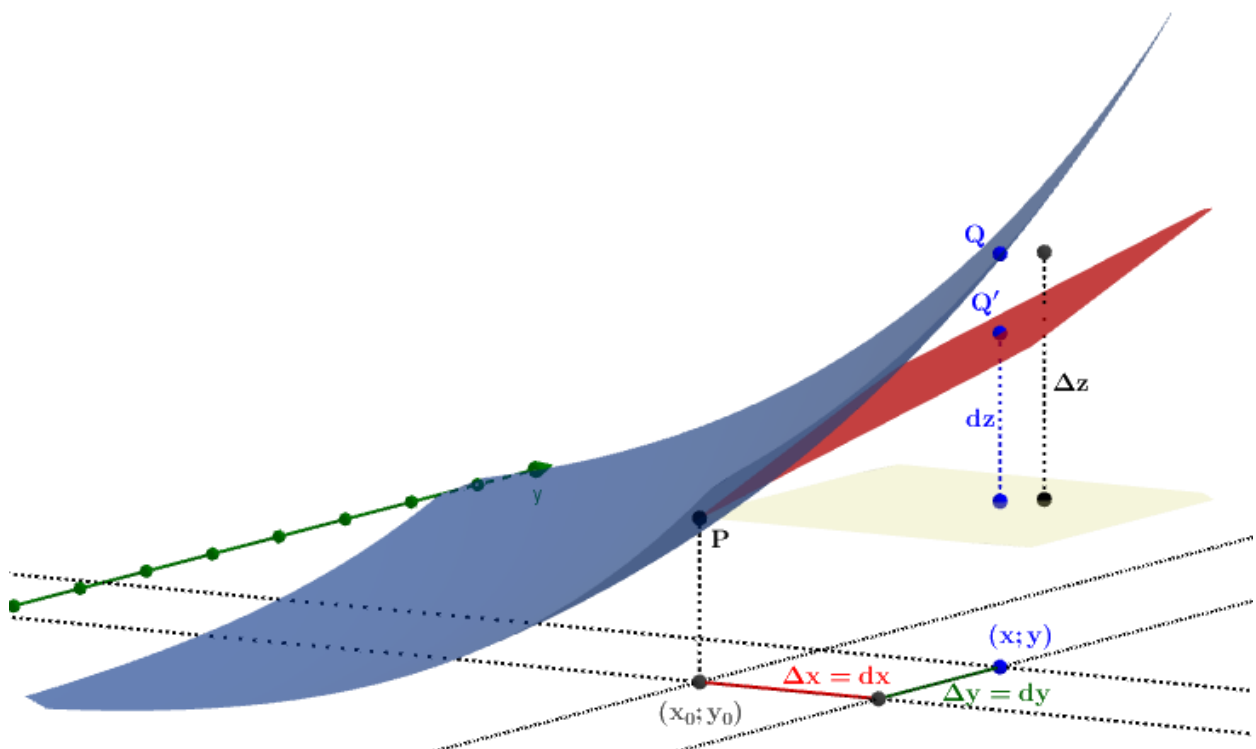
$$L(h_x; h_y) = (f_x(0;0) \quad f_y(0;0)) = (0 \quad 0)$$

Die Untersuchung des Fehlerterms $r(h_x; h_y)$ zeigt

$$\begin{aligned}\frac{r(\vec{h})}{|\vec{h}|} &= \frac{f(h_x; h_y) - f(0;0) - (0 \quad 0) \vec{h}}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}} = \frac{h_x^3 h_y^3}{(h_x^2 + h_y^2)^{\frac{3}{2}}} = \left(\frac{h_x h_y}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}} \right)^3 \\ &= \left(\frac{h_x^2 h_y^2}{h_x^2 + h_y^2} \right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{1}{\frac{1}{h_y^2} + \frac{1}{h_x^2}} \right)^{\frac{3}{2}} \xrightarrow{(h_x; h_y) \rightarrow (0;0)} 0\end{aligned}$$

Damit ist f in $(0;0)$ auch total differenzierbar.

1.4.2 Das Totale Differenzial



Die Abbildung zeigt wieder eine Funktion $f(x; y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und die im Punkt P erstellte Tangentialebene. Es handelt sich somit bei f um eine im Punkt $P(x_0; y_0; z_0)$ total differenzierbare Funktion. Verschieben wir den Punkt P auf der Fläche in den Punkt Q , so ergibt sich eine Änderung des Funktionswerts um Δz . Die x - bzw. y -Koordinaten ändern sich um Δx bzw. Δy . Gleichzeitig können wir

diese Änderungen auch auf unserer linearen Näherung (der Tangentialebene) beobachten. Hier gilt $\Delta x = dx$ und $\Delta y = dy$. Es tritt jedoch in z -Richtung eine andere Änderung auf, nicht Δz , sondern dz .

Wir werden diese linearisierte Änderung dz jetzt bestimmen. Dazu verwenden wir Formel (1.3) und setzen ein.

$$\begin{aligned} dz &= z - z_0 & dy &= y - y_0 & dx &= x - x_0 \\ dz &= f_x(x_0; y_0)dx + f_y(x_0; y_0)dy \end{aligned}$$

Der Ausdruck

$$dz = \mathbf{f}_x \cdot d\mathbf{x} + \mathbf{f}_y \cdot d\mathbf{y} \tag{1.4}$$

heißt das *Totale Differenzial*.

Bemerkung 1.4.6. Geometrisch beschreibt das Totale Differenzial dz die Änderung der Höhenkoordinate auf der Tangentialebene im Punkt P .

Die Differenziale dx, dy und dz sind die Koordinaten eines beliebigen Punktes auf der Ebene, bezogen auf den Punkt P . Man kann sie als relatives Koordinatensystem interpretieren.

1.4.3 Anwendungen des Totalen Differenzials

Beispiel 1.4.7. Differentiation nach einem Parameter.

Wir betrachten den Kreis

$$\begin{aligned} x(t) &= 2 \cos(t) \\ y(t) &= 2 \sin(t) \quad , t \in [0; 2\pi) \end{aligned}$$

und die darauf definierte Funktion

$$f(x; y) = z(x; y) = (x - y)^2 = (x(t) - y(t))^2$$

Um die Ableitung $\frac{df}{dt}$ zu berechnen, stehen zwei Möglichkeiten zur Verfügung.

Zuerst können wir einfach direkt $x(t)$ und $y(t)$ in die Funktionsgleichung von $f(x; y)$ einsetzen und dann nach t differenzieren. Wir wollen hier aber eine andere Möglichkeit zeigen, die das Totale Differenzial verwendet.

Ausgehend von Gleichung (1.4)

$$dz = f_x \cdot dx + f_y \cdot dy$$

erhalten wir nach formaler Division durch dt die Gleichung

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} \tag{1.5}$$

Diese Gleichung wird oft als *Kettenregel* bezeichnet. Die einzelnen Ableitungen lauten

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2(x - y) & \frac{\partial f}{\partial y} &= -2(x - y) \\ \frac{dx}{dt} &= -2 \sin(t) & \frac{dy}{dt} &= 2 \cos(t) \end{aligned}$$

Einsetzen in Gleichung (1.5):

$$\begin{aligned}
 \frac{df}{dt} &= -4 \sin(t)(x - y) - 4 \cos(t)(x - y) \\
 &= -4(x - y)(\sin(t) + \cos(t)) \\
 &= -4(2 \cos(t) - 2 \sin(t))(\sin(t) + \cos(t)) \\
 &= -8(\cos(t)^2 - \sin(t)^2) \\
 &= 8(\sin(t)^2 - \cos(t)^2)
 \end{aligned}$$

Beispielsweise ergibt sich für den Parameterwert $t = \frac{\pi}{3}$ eine Änderung von

$$\frac{df}{dt} = 8 \left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 \right) = 8 \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4} \right) = 4$$

Anschaulich entspricht der Ausdruck $\frac{df}{dt}$ der Änderungsgeschwindigkeit der Höhenkoordinate.

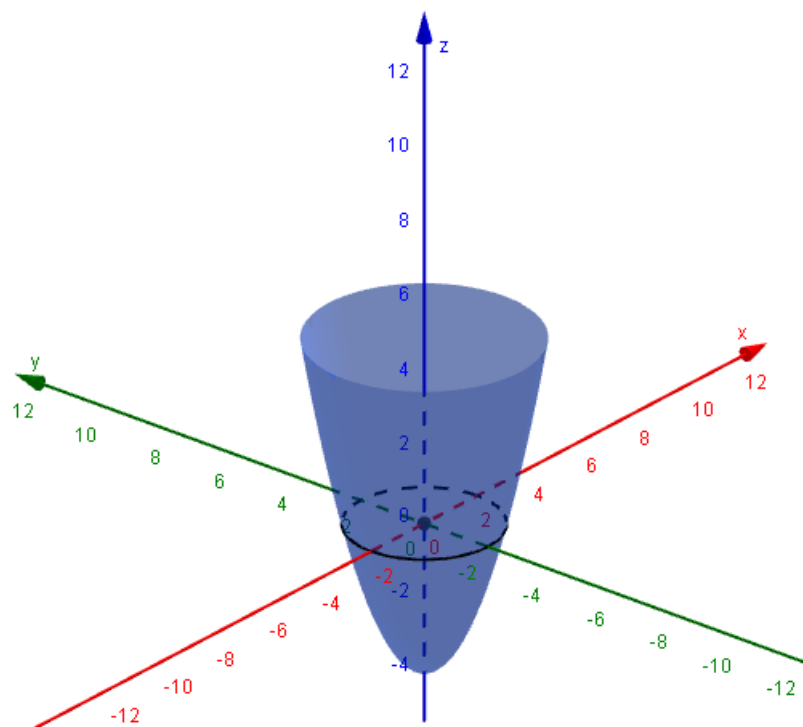
Beispiel 1.4.8. Implizites Differenzieren.

Wir haben eine Gleichung in impliziter Form vorliegen, z.B. den Kreis

$$x^2 + y^2 = 4$$

und möchten die Ableitungen in jedem Punkt berechnen. Um das zu bewerkstelligen, ändern wir unsere Sichtweise auf unser ebenes Problem.

Diese ebene Kurve können wir als Höhenlinie der Funktion $F(x; y) = z(x; y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$ auffassen. Dabei handelt es sich um ein nach oben offenes Drehparaboloid, das die xy -Ebene genau im gegebenen Kreis schneidet.



Unsere Funktion $F(x; y)$ interessiert uns nur dort, wo konstant $z = 0$ gilt. Das bedeutet auch, dass nie eine Höhenänderung dz eintreten kann, es gilt also $dz = 0$.
Diese Erkenntnis setzen wir in die Gleichung des Totalen Differenzials ein.

$$\begin{aligned} dz &= f_x \cdot dx + f_y \cdot dy \\ 0 &= f_x \cdot dx + f_y \cdot dy \quad / : dx \\ 0 &= f_x + f_y \cdot \frac{dy}{dx} \\ \underbrace{\frac{dy}{dx}}_{=y'} &= \frac{-f_x}{f_y} \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung gilt allgemein für implizit gegebene Funktionen und liefert für jeden Punkt $(x; y)$ den entsprechenden Tangentenanstieg.

$$\mathbf{y}'(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \frac{-\mathbf{f}_x}{\mathbf{f}_y} \quad (1.6)$$

In diese Formel setzen wir ein und erhalten für unseren Kreis

$$y' = \frac{-2x}{2y} = \frac{-x}{y}$$

Mit dieser Formel können wir direkt alle Tangentensteigungen des Kreises berechnen. Die Steigung der Tangente im Punkt $(0; 2)$ beträgt somit $y' = \frac{-0}{2} = 0$, es ist eine horizontale Tangente.

1.5 Zusammenfassung der Ableitungsbegriffe

Wir haben drei verschiedene Möglichkeiten gesehen, wie man sich dem Begriff der Ableitung einer mehrdimensionalen Funktion nähern kann. Um die möglicherweise entstandene Verwirrung etwas aufzulösen, sollen jetzt die Zusammenhänge und einige Beispiele folgen.

Für die verschiedenen Arten der Differenzierbarkeit gilt die folgende Implikationskette:

$$\begin{aligned} \text{Stetig partiell differenzierbar} &\implies \text{Total differenzierbar} \\ \text{Total differenzierbar} &\implies \text{alle Richtungsableitungen existieren} \\ \text{alle Richtungsableitungen existieren} &\implies \text{Partiell differenzierbar} \end{aligned}$$

Keiner dieser Implikationspfeile kann umgedreht werden! Wenn wir von *differenzierbar* sprechen, so meinen wir immer die *totale Differenzierbarkeit* einer Funktion. Diese impliziert auch die Stetigkeit der Funktion, wie wir es aus der eindimensionalen reellen Analysis kennen. Keine der schwächeren Eigenschaften ist ausreichend, um auf die Stetigkeit einer Funktion zu schließen. Dazu betrachten wir das folgende Beispiel.

Bemerkung 1.5.1. Die oben stehende Implikationskette liefert eine einfache Methode um auf die Differenzierbarkeit von Funktionen zu schließen. Wir brauchen nur die partiellen Ableitungen zu bilden und diese anschließend auf Stetigkeit zu untersuchen. Ist diese erwiesen, so folgt sofort die Differenzierbarkeit in allen uns bekannten Varianten.

Sollten die partiellen Ableitungen nicht stetig sein, so muss die Funktion weiter untersucht werden.

Beispiel 1.5.2. Gegeben sei die Funktion

$$f(x; y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & , (x; y) \neq (0; 0) \\ 0 & , (x; y) = (0; 0) \end{cases}$$

Wir bestimmen allgemein die Richtungsableitung in Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ im Ursprung $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} f'_{\vec{v}}(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\begin{pmatrix} 0 + h \cdot v_1 \\ 0 + h \cdot v_2 \end{pmatrix}\right) - f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}{h|\vec{v}|} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{hv_1 \cdot h^2 v_2^2}{h^2 v_1^2 + h^4 v_2^4} - 0}{h\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{hv_1 v_2^2}{v_1^2 + h^2 v_2^4}}{h\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v_1 v_2^2}{(v_1^2 + h^2 v_2^4)\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} \\ &= \frac{v_2^2}{v_1 \sqrt{v_1^2 + v_2^2}} \end{aligned}$$

Damit existieren die Richtungsableitungen in alle Richtungen, wobei wir noch den Sonderfall $v_1 = 0$ extra untersuchen müssen.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{hv_1 \cdot h^2 v_2^2}{h^2 v_1^2 + h^4 v_2^4} - 0}{h\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{0}{0 + h^4 v_2^4} - 0}{h\sqrt{0 + v_2^2}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h\sqrt{0 + v_2^2}} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

Somit haben wir gezeigt, dass die Funktion tatsächlich alle Richtungsableitungen besitzt. Sie ist

jedoch nicht stetig, denn wählen wir den Weg $\begin{pmatrix} y^2 \\ y \end{pmatrix}$ zum Ursprung so gilt

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{y^2 y^2}{y^4 + y^4} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{y^4}{2y^4} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \neq 0$$

Die Funktion ist daher im Ursprung nicht stetig.

Beispiel 1.5.3. Wir haben in Beispiel 1.4.4 eine Funktion von $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ linearisiert, d.h. die totale Ableitung $L(h)$ berechnet. Wir betrachten jetzt noch ein etwas allgemeineres Beispiel. Gegeben sei die Funktion

$$f(\vec{x}): \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x^2 + y + z \\ 2x - z^3 \\ xy \end{pmatrix} \end{cases}$$

Wir wollen die Ableitung dieser Funktion bestimmen, d.h. wir suchen eine *lineare Abbildung* $L(h)$ von \mathbb{R}^3 nach \mathbb{R}^3 , die Gleichung (1.2)

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + L(h) + r(h)$$

genügt. Der Fehlerterm $r(h)$ muss natürlich wieder schnell genug gegen 0 konvergieren. Die gesuchte lineare Abbildung muss eine Koordinatendarstellung besitzen, also als Matrix darstellbar sein. Diese Eigenschaft gilt bekanntlich für alle linearen Abbildungen zwischen Vektorräumen. Für eine (total) differenzierbare Funktion ist die Matrix gegeben durch die schon oben erwähnte *Jacobi-Matrix*, die aus allen ersten partiellen Ableitungen der Komponentenfunktionen besteht. In unserem Fall erhalten wir

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial f_1}{\partial x} = 6x & \frac{\partial f_1}{\partial y} = 1 & \frac{\partial f_1}{\partial z} = 1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} = 2 & \frac{\partial f_2}{\partial y} = 0 & \frac{\partial f_2}{\partial z} = -3z^2 \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} = y & \frac{\partial f_3}{\partial y} = x & \frac{\partial f_3}{\partial z} = 0 \end{array}$$

und somit die Jacobi-Matrix

$$J_f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 6x & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -3z^2 \\ y & x & 0 \end{pmatrix}$$

Alle partiellen Ableitungen sind stetig, die Funktion ist somit total differenzierbar. Möchten wir Funktionswerte in einer kleinen Umgebung des Punktes $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ annähern, so können wir unsere gerade gewonnene Linearisierung anwenden.

$$J_f \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Wollen wir den Funktionswert an der Stelle $\vec{x}_0 + \Delta\vec{x} = \begin{pmatrix} 1,03 \\ 0,98 \\ 1,1 \end{pmatrix}$ approximieren, so berechnen wir

$$f(\vec{x}_0 + \Delta\vec{x}) \approx f(\vec{x}_0) + J_f(\vec{x}_0) \cdot \begin{pmatrix} 0,03 \\ -0,02 \\ 0,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \cdot 0,03 - 0,02 + 0,1 \\ 2 \cdot 0,03 + 0 - 3 \cdot 0,1 \\ 1 \cdot 0,03 + 1 \cdot (-0,02) + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,26 \\ 0,76 \\ 1,01 \end{pmatrix}$$

Ein Vergleich mit der exakten Lösung $\begin{pmatrix} 5,2627 \\ 0,729 \\ 1,0094 \end{pmatrix}$ zeigt die gute Brauchbarkeit der Näherung.

1.6 Optimierungsaufgaben

In Anwendungen treten sehr häufig Fragestellungen auf, bei denen Optimierungen eine zentrale Rolle spielen. Sollen etwa ein Umsatz maximiert, oder Kosten minimiert werden, dann hängen diese Größen meistens von mehr als einer Variable ab. Es ist daher eine natürliche Fragestellung, ob und wo Funktionen einen maximalen/minimalen Wert erreichen.

Ähnlich wie im Eindimensionalen spielen auch hier die Ableitungen der zu optimierenden Funktion eine wesentliche Rolle. Die Situation ist jedoch etwas komplexer, da wir eine große Vielfalt von Ableitungen haben. Daher geben wir ohne Beweis die folgenden Bedingungen für extremale Stellen an.

Satz 1.6.1. *Notwendige und hinreichende Bedingung für Extremstellen $(x_0; y_0)$.*

$$f_x(x_0; y_0) = 0 \quad \text{und} \quad f_y(x_0; y_0) = 0$$

$$\Delta := f_{xx}(x_0; y_0) \cdot f_{yy}(x_0; y_0) - f_{xy}(x_0; y_0)^2 > 0$$

Hier wird vorausgesetzt, dass $f_{xy} = f_{yx}$ gilt. Die Art des Extremums wird durch die Vorzeichen der zweiten Ableitung bestimmt.

$$f_{xx}(x_0; y_0) < 0 \implies \text{rel. Maximum}$$

$$f_{xx}(x_0; y_0) > 0 \implies \text{rel. Minimum}$$

Für $\Delta < 0$ liegt ein Sattelpunkt vor, bei $\Delta = 0$ kann keine Entscheidung getroffen werden.⁴

Bemerkung 1.6.2. *Der Ausdruck $\Delta = f_{xx}(x_0; y_0) \cdot f_{yy}(x_0; y_0) - f_{xy}(x_0; y_0)^2$ ist die Determinante der Hesse-Matrix⁵. Sie hat die Gestalt*

$$H_f(x_0; y_0) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x_0; y_0)}{\partial x \partial x} & \frac{\partial^2 f(x_0; y_0)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x_0; y_0)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f(x_0; y_0)}{\partial y \partial y} \end{pmatrix}$$

Beispiel 1.6.3. Gesucht sind die Extrempunkte der Funktion $f(x; y) = z(x; y) = 3xy - x^3 - y^3$.

$$z_x = 3y - 3x^2$$

$$z_y = 3x - 3y^2$$

$$z_{xx} = -6x$$

$$z_{yy} = -6y$$

$$z_{xy} = z_{yx} = 3$$

Wir stellen die notwendigen Gleichungen auf.

$$z_x = 0 = 3(y - x^2) \implies y = x^2$$

$$z_y = 0 = 3(x - y^2) \implies x = y^2$$

⁴Man müsste weitere Untersuchungen anstellen.

⁵Ludwig Otto Hesse (1811-1874)

Lösen des (nichtlinearen) Gleichungssystems:

$$x = x^4$$

$$0 = x^4 - x$$

$$0 = x(x^3 - 1)$$

$$x_1 = 0$$

$$x^3 = 1 \implies x_2 = 1, \quad x_3 = e^{i\frac{2\pi}{3}}, \quad x_4 = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$$

Die komplexen Lösungen sind nicht weiter von Interesse, wir haben daher die Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$ als Kandidaten für Extremstellen. Einsetzen in $y = x^2$ liefert die beiden Punkte $P_1(0; 0)$ und $P_2(1; 1)$.

- Für P_1 :

$$\Delta = z_{xx}(0; 0) \cdot z_{yy}(0; 0) - z_{xy}(0; 0)^2 = 0 - 3^2 = -9 < 0$$

Bei P_1 liegt ein Sattelpunkt vor!

- Für P_2 :

$$\Delta = z_{xx}(1; 1) \cdot z_{yy}(1; 1) - z_{xy}(1; 1)^2 = -6 \cdot (-6) - 9 = 36 - 9 = 27 > 0$$

Hier liegt ein Extremum vor, dessen Art noch zu bestimmen ist.

$$z_{xx}(1; 1) = -6 < 0 \implies \text{Maximum}$$

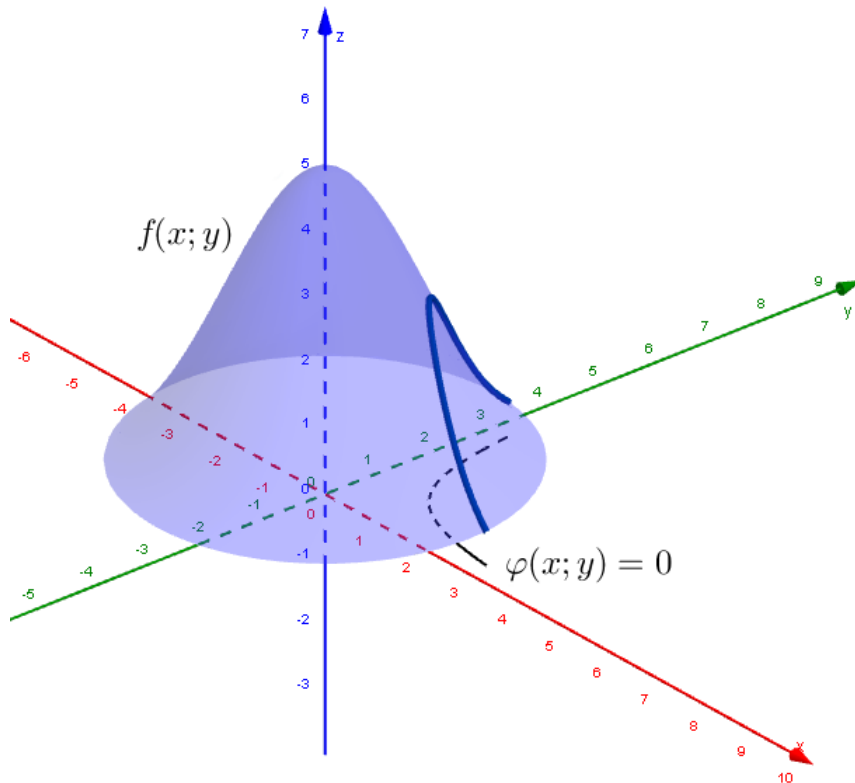
Bei P_2 liegt ein Hochpunkt vor. Die Koordinaten erhalten wir aus der Funktionsgleichung $z(x; y)$.

$$P_1 = (0; 0; 0)$$

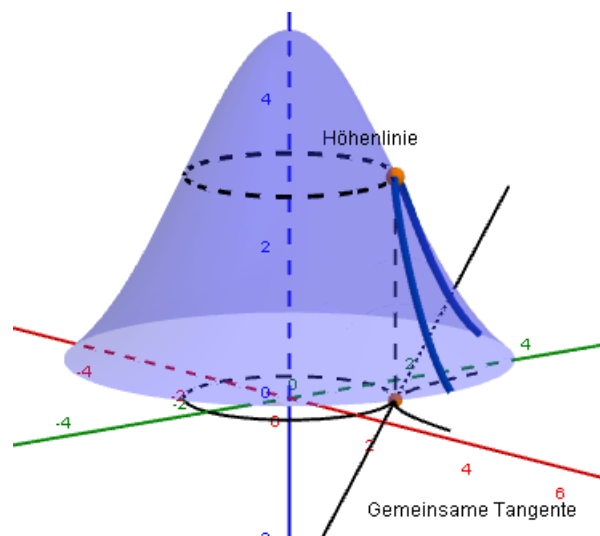
$$P_2 = (1; 1; 1)$$

1.7 Optimierung mit Nebenbedingungen

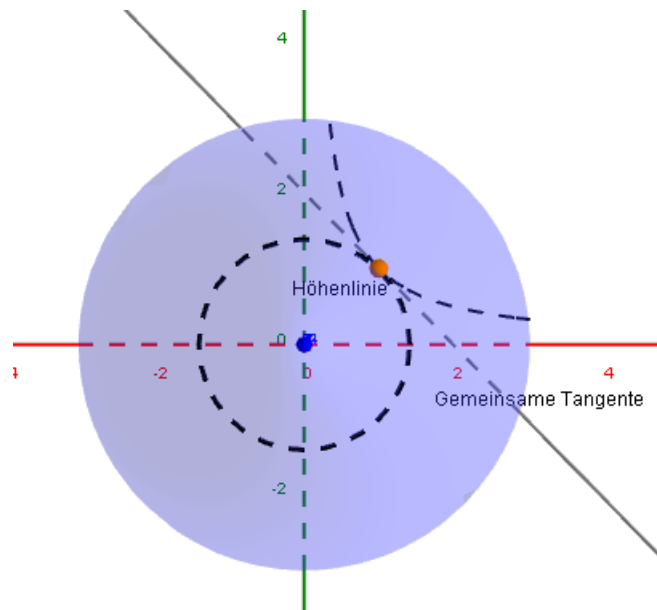
Wir stellen jetzt eine zusätzliche Forderung an unsere Lösung eines Optimierungsproblems. Sie muss eine vorausgesetzte Bedingung $\varphi(x, y) = 0$ erfüllen. Die nachfolgende Abbildung zeigt die Problemstellung.



Es wird nicht das Maximum auf der gesamten Funktionsfläche gesucht, sondern nur unter den Werten $(x; y)$, die auch die Bedingung $\varphi(x; y) = 0$ erfüllen. Die Lösung des Problems kann ebenfalls geometrisch veranschaulicht werden und ist in nachfolgender Abbildung dargestellt.



Das gesuchte Maximum liegt nicht nur auf der Kurve des Funktionsgraphen, es liegt auch auf einer Höhenlinie. Diese Höhenlinie kann in die xy -Ebene projiziert werden und hat dort mit $\varphi(x; y) = 0$ eine gemeinsame Tangente.



Gelingt es den Punkt der gemeinsamen Tangente zu berechnen, so ist das Optimierungsproblem gelöst, denn dort liegt auch die gesuchte Extremstelle.

Die beiden Kurven werden im Allgemeinen in impliziter Form gegeben sein, daher benötigen wir für die Tangentensteigung Formel (1.6). Wir setzen die Steigung der Tangente an die Höhenlinie $f(x; y) = \text{const}$ gleich der Steigung der Tangente an die Nebenbedingung $\varphi(x; y) = 0$. Unter Verwendung von Formel (1.6) erhalten wir

$$\frac{\varphi_x(x_0; y_0)}{\varphi_y(x_0; y_0)} = \frac{f_x(x_0; y_0)}{f_y(x_0; y_0)}$$

wobei wir das negative Vorzeichen schon gekürzt haben. Umformen führt zum sogenannten *Lagrange-Multiplikator* λ

$$\frac{f_x(x_0; y_0)}{\varphi_x(x_0; y_0)} = \frac{f_y(x_0; y_0)}{\varphi_y(x_0; y_0)} =: -\lambda \quad (1.7)$$

Das negative Vorzeichen von λ hat nur kosmetische Gründe. Definition (1.7) führt direkt auf die beiden *Lagrange-Gleichungen*

$$\begin{aligned} f_x(x_0; y_0) + \lambda \varphi_x(x_0; y_0) &= 0 \\ f_y(x_0; y_0) + \lambda \varphi_y(x_0; y_0) &= 0 \end{aligned}$$

Zusammenfassung:

Gegeben sei $z = f(x; y)$ mit Nebenbedingung $\varphi(x, y) = 0$. Zuerst erstellt man die *Lagrange-Funktion*

$$L(x; y; \lambda) := f(x, y) + \lambda \cdot \varphi(x; y)$$

Dann werden alle partiellen ersten Ableitungen berechnet, dies führt automatisch zu den Lagrange Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(x; y; \lambda)}{\partial x} &= L_x = f_x(x_0; y_0) + \lambda \varphi_x(x_0; y_0) = 0 \\ \frac{\partial L(x; y; \lambda)}{\partial y} &= L_y = f_y(x_0; y_0) + \lambda \varphi_y(x_0; y_0) = 0 \\ \frac{\partial L(x; y; \lambda)}{\partial \lambda} &= L_\lambda = \varphi(x_0; y_0) = 0 \end{aligned}$$

Aus diesem (nicht unbedingt linearen) Gleichungssystem werden dann die Koordinaten des Extrempunkts berechnet. Die Bedingungen sind notwendig, jedoch nicht hinreichend. Um genaueres über die

Art des Extremums zu erfahren, wird die sogenannte *geränderte Hesse-Matrix* $\overline{H}(x_0; y_0; \lambda)$ betrachtet.

$$\overline{H}(x_0; y_0; \lambda) := \begin{pmatrix} 0 & \varphi_x & \varphi_y \\ \varphi_x & L_{xx} & L_{xy} \\ \varphi_y & L_{yx} & L_{yy} \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

Es gelten die folgenden Implikationen:

$$\det(\overline{H}) > 0 \implies \text{Maximum}$$

$$\det(\overline{H}) < 0 \implies \text{Minimum}$$

$$\det(\overline{H}) = 0 \implies \text{Keine Aussage möglich}$$

Beispiel 1.7.1. Anwendung des Lagrange-Verfahrens.

Wir suchen das Maximum auf der Fläche $f(x; y) = 1 - (x^2 + y^2)$ unter der Nebenbedingung $y = 2x + 1$.

Wir bringen die Nebenbedingung zuerst in die implizite Form $\varphi(x; y) = y - 2x - 1 = 0$ und stellen die Lagrange-Gleichungen auf.

$$L(x; y; \lambda) = 1 - (x^2 + y^2) + \lambda(y - 2x - 1)$$

$$L_x = -2x - 2\lambda = 0$$

$$L_y = -2y + \lambda = 0$$

$$L_\lambda = y - 2x - 1 = 0$$

Dieses lineare Gleichungssystem ist einfach zu lösen und führt auf die Lösungen $x = -\frac{2}{5}$ und $y = \frac{1}{5}$.

Die Art des Extremums stellen wir mit der geränderten Hesse-Matrix (1.8) fest:

$$\overline{H}(x_0; y_0; \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & \varphi_x & \varphi_y \\ \varphi_x & L_{xx} & L_{xy} \\ \varphi_y & L_{yx} & L_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\det(\overline{H}) = 0 - (-2 + 0 - 8) = 10$$

Es handelt sich an dieser Stelle also tatsächlich um das gesuchte Maximum.

Beispiel 1.7.2.

Wir suchen alle Extremstellen der Funktion $f(x; y) = e^{-(x^2+y^2)}$ unter der Nebenbedingung $\varphi(x; y) = (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 - \frac{1}{4} = 0$. Bei der Nebenbedingung handelt es sich in diesem Fall um einen Kreis mit Mittelpunkt $(\frac{1}{2}; 0)$ und Radius $r = \frac{1}{2}$.

Wir bestimmen wieder die Lagrange-Gleichungen.

$$L(x; y; \lambda) = e^{-(x^2+y^2)} + \lambda \left[(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 - \frac{1}{4} \right]$$

$$L_x = e^{-(x^2+y^2)} \cdot (-2x) + 2\lambda \left(x - \frac{1}{2} \right) = 0$$

$$L_y = e^{-(x^2+y^2)} \cdot (-2y) + 2\lambda y = 0$$

$$L_\lambda = \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + y^2 - \frac{1}{4} = 0$$

Diesem nichtlinearen Gleichungssystem ist der richtige Ansatz zur Lösung nicht mehr einfach anzusehen. Es erweist sich nach einigem Nachdenken als zielführend, die Gleichung $L_y = 0$ näher zu betrachten:

$$\begin{aligned} 0 &= e^{-(x^2+y^2)} \cdot (-2y) + 2\lambda y \\ 0 &= 2y \cdot \left(\lambda - e^{-(x^2+y^2)} \right) \end{aligned}$$

1. Fall:

$$\begin{aligned} \lambda - e^{-(x^2+y^2)} &= 0 \\ \lambda &= e^{-(x^2+y^2)} \end{aligned}$$

Einsetzen in $L_x = 0$ ergibt

$$\begin{aligned} e^{-(x^2+y^2)}(-2x) + 2e^{-(x^2+y^2)} \left(x - \frac{1}{2} \right) &= 0 \\ \underbrace{2e^{-(x^2+y^2)}}_{\neq 0} \cdot \underbrace{\left(-x + x - \frac{1}{2} \right)}_{\neq 0} &= 0 \end{aligned}$$

Da beide Faktoren sicher nicht Null sind, kann dieser Fall gar nicht eintreten.

2. Fall:

$$\begin{aligned} 2y &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

Einsetzen in $L_\lambda = 0$ ergibt

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} &= 0 \\ \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 &= \frac{1}{4} \\ x_1 &= 1 \\ x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Nach diesen Fallunterscheidungen erhalten wir zwei Kandidaten für Extremstellen, $P_1(1; 0)$ und $P_2(0; 0)$. Durch Einsetzen in L_x berechnen wir noch den Lagrange Multiplikator $\lambda_1 = \frac{2}{e}$ und $\lambda_2 = 0$.

Die geränderte Hesse-Matrix ist in diesem Beispiel relativ rechenintensiv. Als Endergebnis erhalten wir

$$\overline{H}(1; 0; \frac{2}{e}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{6}{e} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{e} \end{pmatrix} \quad \det(\overline{H}) = -\frac{2}{e} \quad \overline{H}(0; 0; 0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \det(\overline{H}) = 2$$

Somit haben wir für $P_1(1; 0; \frac{1}{e})$ ein Minimum und $P_2(0; 0; 1)$ ein Maximum bestimmt.

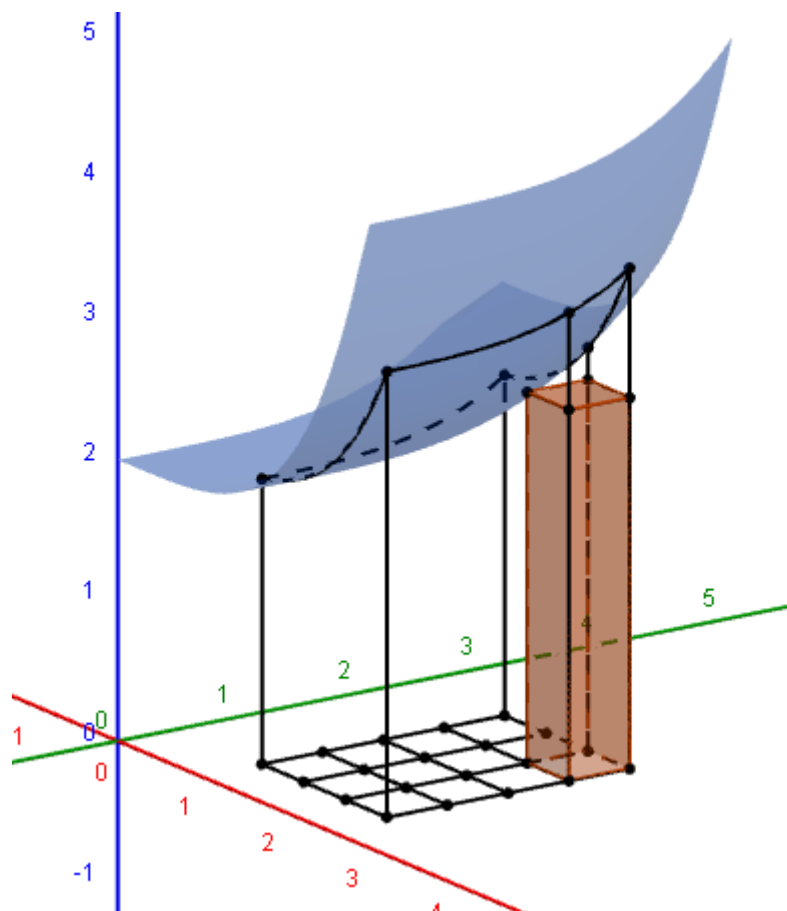
Achtung: Die z -Koordinaten der Punkte $P_{1,2}$ müssen durch Einsetzen in $f(x; y)$ berechnet werden und stimmen i.A. nicht mit $\lambda_{1,2}$ überein.

2 Mehrfachintegrale

Ebenso wie die Differenzialrechnung kann auch die Integralrechnung auf Funktionen mehrerer Veränderlicher ausgedehnt werden. In diesem Kapitel werden Doppel- und Dreifachintegral behandelt.

2.1 Doppelintegrale

Als Motivation zur Begriffsbildung betrachten wir die abgebildete Skizze mit der Fragestellung, welches Volumen sich zwischen der Funktionsfläche und dem gerauserten Bereich befindet.



Die eingezeichnete beliebig gewählte k -te Säule hat das Volumen $\Delta V_k = \Delta x \cdot \Delta y \cdot z_k$.

Wir können eine erste Näherung des gesuchten Gesamtvolumens geben, indem wir über alle n Säulen summieren.

$$V \approx \sum_{k=1}^n z_k \cdot \Delta x \Delta y$$

Lassen wir nun die Abmessungen der Grundfläche einer Säule $\Delta x, \Delta y$ gegen 0 und gleichzeitig die Anzahl n der Säulen gegen ∞ streben, erhalten wir als Grenzwert (sofern dieser existiert)

$$V = \lim_{\substack{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{k=1}^n z_k \cdot \Delta x \Delta y =: \int_G z_k dA$$

wobei $dA = dx \cdot dy$ gilt und G das Integrationsgebiet bezeichnet.

Diese Summation bzw. Integration macht allerdings Probleme, denn z_k hängt immer noch von k , der "Nummer" der Säule ab. Daher nummerieren wir ein wenig um, und weisen jeder Säule eine $(x; y)$ -Koordinate zu, das ist auch viel natürlicher, denn $z(x; y)$ hängt von diesen beiden Variablen ab. Wir summieren also zuerst über x , danach über y .¹

$$V = \lim_{\substack{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0 \\ n_x, n_y \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^{n_y} \sum_{j=1}^{n_x} z(x_j; y_i) \cdot \Delta x \Delta y =: \iint_G z(x; y) dx dy$$

Aus dem Integral $\int_G z_k dA$ wurde ein *Doppelintegral*. Zur Verdeutlichung dient das folgende Beispiel.

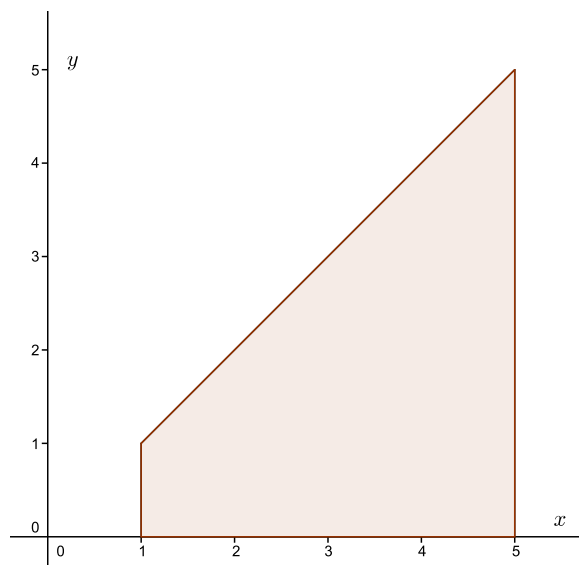
Beispiel 2.1.1.

Wir bestimmen das Volumen unter der Fläche von $f(x; y) = 3x^2y$ über dem Integrationsgebiet $G = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 5 \wedge 0 \leq y \leq 4\}$.

Um das Volumen zu bestimmen haben wir das folgende Doppelintegral zu berechnen.

$$\begin{aligned} V &= \int_G f(x; y) dA \\ &= \iint_G f(x; y) dx dy = \int_{y=0}^{y=4} \int_{x=1}^{x=5} 3x^2y \cdot dx dy \\ &= \int_{y=0}^{y=4} [x^3y]_{x=1}^{x=5} dy = \int_{y=0}^{y=4} 124y \cdot dy = [62y^2]_{y=0}^{y=4} = \mathbf{992} \end{aligned}$$

Beispiel 2.1.2. Gesucht ist wieder das Volumen von $f(x; y) = 3x^2y$, diesmal aber über dem abgebildeten Integrationsgebiet.



¹Die umgekehrte Reihenfolge wäre hier auch möglich.

Wir müssen zuerst die Integrationsgrenzen aus der Zeichnung bestimmen. Die Variable x läuft von 1 bis 5, während y in diesem Bereich zwischen 0 und der Geraden $y = x$ variiert. Insgesamt gilt

$$G = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 5 \wedge 0 \leq y \leq x\}$$

Das Integral berechnet sich analog zum vorigen Beispiel:

$$V = \int_{x=1}^5 \int_{y=0}^x 3x^2 y \cdot dy dx = \int_{x=1}^5 \left[3x^2 \frac{y^2}{2} \right]_0^x dx = \int_{x=1}^5 3 \frac{x^4}{2} dx = \left[\frac{3x^5}{10} \right]_0^5 = \mathbf{937,2}$$

Satz 2.1.3. (von Fubini²)

Sei $f : [a; b] \times [c; d] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann gilt:

$$\int_c^d \int_a^b f(x; y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x; y) dy dx$$

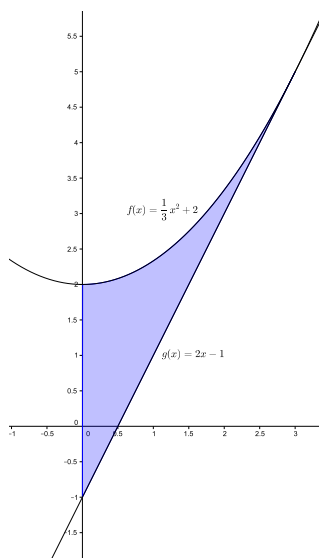
Die Reihenfolge der Integrationen darf bei stetigen Funktionen auf Intervallen also vertauscht werden.

Bemerkung 2.1.4. Neben der Stetigkeit der Funktion $f(x; y)$ ist beim Satz von Fubini entscheidend, dass die Integrationsgrenzen konstant sind! In Beispiel 2.1.1 wäre ein Vertauschen der Integrationsreihenfolge durchaus möglich gewesen, in Beispiel 2.1.2 darf nicht vertauscht werden.

Es muss immer jene Integration zuerst durchgeführt werden, in der noch abhängige Grenzen auftreten!

Beispiel 2.1.5.

Zu berechnen ist die Fläche zwischen den beiden Funktionen $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + 2$ und $g(x) = 2x - 1$ im I. und IV. Quadranten.



²Guido Fubini (1879 - 1943)

Für die Integrationsgrenzen brauchen wir den Schnittpunkt der beiden Funktionen.

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}x^2 + 2 &= 2x - 1 \\ x^2 - 6x + 9 &= 0 \\ x_{1,2} &= 3 \pm \sqrt{0} = 3 \\ \implies y &= 5\end{aligned}$$

Unser Integrationsbereich lässt sich mit den beiden Ungleichungen

$$\begin{aligned}0 &\leq x \leq 3 \\ 2x - 1 &\leq y \leq \frac{1}{3}x^2 + 2\end{aligned}$$

beschreiben. Wir müssen daher zuerst die Integration nach der Variable y durchführen (inneres Integral), danach wird nach x integriert.

In der Aufgabe wird nicht nach einem Volumen gefragt, sondern direkt nach der Fläche des Integrationsgebietes. Die erhalten wir, indem jedem Punkt konstant die Höhe = 1 zugeordnet wird. Damit ist das entstehende Volumen über der Fläche zahlenmäßig gleich dem Flächeninhalt.

$$\begin{aligned}\int_0^3 \int_{2x-1}^{\frac{1}{3}x^2+2} 1 \, dy \, dx &= \int_0^3 \left(\frac{1}{3}x^2 + 2 - (2x - 1) \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{9}x^3 - x^2 + 3x \right]_0^3 = (3 - 9 + 9) = \mathbf{3}\end{aligned}$$

Satz 2.1.6. Ein Doppelintegral mit konstanten Grenzen der Form

$$\int_{x_u}^{x_o} \int_{y_u}^{y_o} u(x) \cdot w(y) \, dy \, dx$$

kann als ein Produkt von Integralen der Form

$$\int_{x_u}^{x_o} u(x) \, dx \cdot \int_{y_u}^{y_o} w(y) \, dy$$

geschrieben werden.

Beispiel 2.1.7.

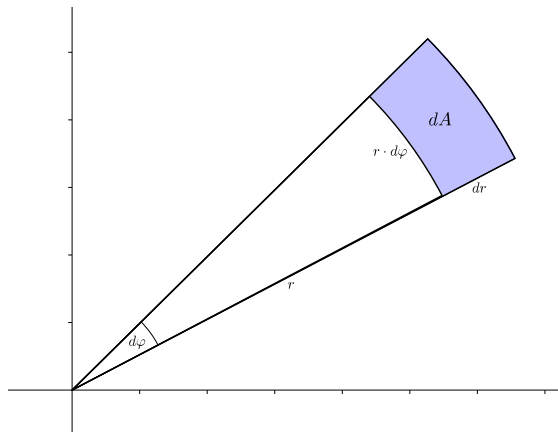
$$f(x; y) = x \cdot e^{y+x^2} \quad G = \{(x; y) \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1,5 \wedge 0,5 \leq y \leq 1\}$$

$$\begin{aligned} \int_{0,5}^1 \int_0^{1,5} x \cdot e^{y+x^2} dx dy &= \int_{0,5}^1 \int_0^{1,5} \underbrace{x e^{x^2}}_{u(x)} \cdot \underbrace{e^y}_{w(y)} dx dy = \int_{0,5}^1 e^y dy \cdot \int_0^{1,5} x \cdot e^{x^2} dx \\ &= [e^y]_{0,5}^1 \cdot [0,5 e^{x^2}]_0^{1,5} = (e - \sqrt{e}) \cdot (0,5 e^{2,25} - 0,5) = \mathbf{4,539} \end{aligned}$$

2.1.1 Integration bezüglich Polarkoordinaten

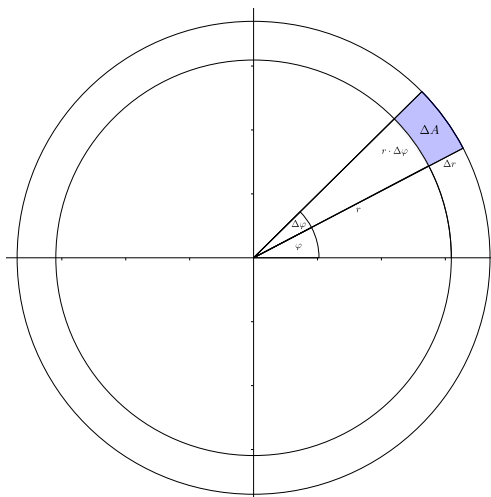
Abhängig vom Integrationsgebiet kann es hilfreich sein, einen Wechsel in Polarkoordinaten durchzuführen. Dazu muss auch das *Flächenelement* $dx dy$ transformiert werden.

Die Berechnung der neuen Flächenelemente bei Koordinatentransformationen erfolgt über die sogenannte *Funktionaldeterminante*, die im Abschnitt 2.3 genauer erklärt wird. In Vorlesungen zu technischen Studiengängen wird gerne die folgende kurze und elementargeometrische Herleitung verwendet.



Werden ausgehend vom Punkt $(r; \varphi)$ infinitesimale Stücke dr und $d\varphi$ hinzugegeben, so erhalten wir für das entstehende Flächenelement $dA = r \cdot dr \cdot d\varphi$. Hier wird angenommen, dass sich die Fläche dA näherungsweise als Rechteck mit den Seiten dr und $r \cdot d\varphi$ beschreiben lässt.

Es soll an dieser Stelle eine kurze Herleitung gezeigt werden, die die Richtigkeit des Ausdrucks dA besser begründet, obwohl wir auch hier formal etwas schlampig sein werden. Die mathematisch exakte Herleitung ist in Abschnitt 2.3 zu finden.

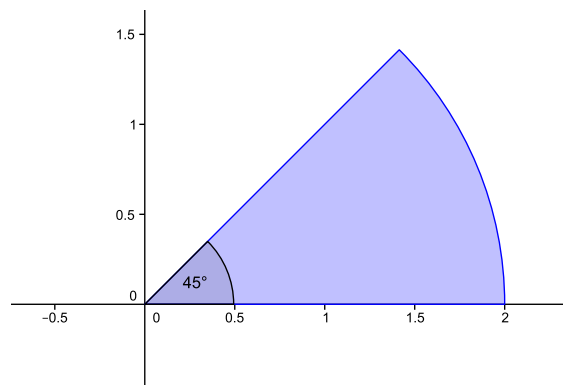


Wir schreiben die Formel zur Berechnung der Fläche ΔA explizit auf und führen anschließend den Grenzübergang durch:

$$\begin{aligned}\Delta A &= \frac{(r + \Delta r)^2 \cdot \Delta \varphi}{2} - \frac{r^2 \cdot \Delta \varphi}{2} \\ \Delta A &= \frac{(2r\Delta r + \Delta r^2) \Delta \varphi}{2} = \frac{(2r + \Delta r) \Delta r \Delta \varphi}{2} \\ \frac{\Delta A}{\Delta r \Delta \varphi} &= \frac{2r + \Delta r}{2} \\ \frac{dA}{dr d\varphi} &= \lim_{\substack{\Delta r \rightarrow 0 \\ \Delta \varphi \rightarrow 0}} \left(\frac{\Delta A}{\Delta r \Delta \varphi} \right) = \frac{2r + 0}{2} = r \\ \implies dA &= r \cdot dr d\varphi\end{aligned}$$

Beispiel 2.1.8.

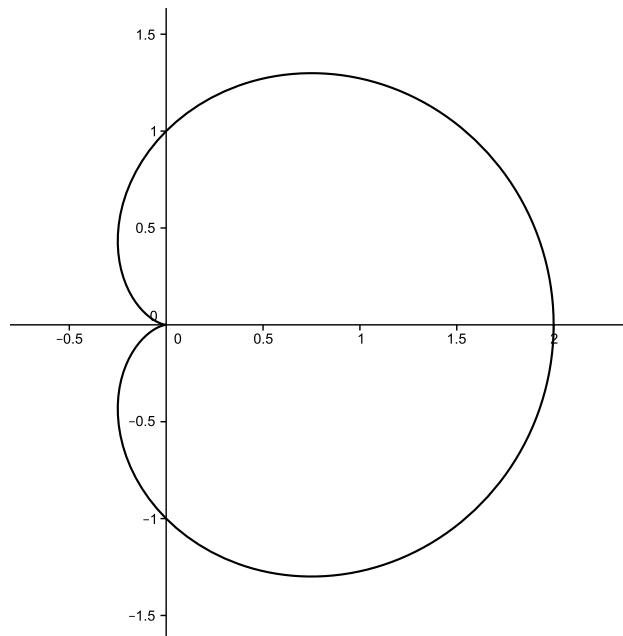
Gesucht ist das Integral der Funktion $f(x; y) = x \cdot y$ über dem Kreissektor mit $r = 2$ und $\varphi = 45^\circ$.



Hier bieten sich Polarkoordinaten an, die wir mit den schon bekannten Formeln $x = r \cdot \cos(\varphi)$ und $y = r \cdot \sin(\varphi)$ umrechnen.

$$\begin{aligned}\int_G f \cdot dA &= \iint_G f(x; y) dx dy = \iint_G f(r; \varphi) r dr d\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{\varphi=45^\circ} \int_{r=0}^{r=2} r \cos(\varphi) r \sin(\varphi) r dr d\varphi = \int_{\varphi=0}^{\varphi=45^\circ} \int_{r=0}^{r=2} r^3 \cos(\varphi) \sin(\varphi) dr d\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{\varphi=45^\circ} \sin(\varphi) \cos(\varphi) d\varphi \cdot \int_{r=0}^{r=2} r^3 dr = \left[\frac{1}{2} \sin(\varphi)^2 \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \cdot \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{4} \right) \cdot 4 = 1\end{aligned}$$

Beispiel 2.1.9. Zu berechnen ist der Flächeninhalt der gegebenen *Kardioide* $r(\varphi) = 1 + \cos(\varphi)$ mit $\varphi \in [0; 2\pi)$.



Der Abstand zum Ursprung r liegt in den Grenzen $0 \leq r \leq 1 + \cos(\varphi)$.

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos(\varphi)} \mathbf{1} r dr d\varphi &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{1+\cos(\varphi)} d\varphi \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos(\varphi))^2 d\varphi \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + 2\cos(\varphi) + \cos(\varphi)^2) d\varphi \\
 &= \frac{1}{2} \left[\varphi + 2\sin(\varphi) + \frac{1}{2} (\varphi + \sin(\varphi)\cos(\varphi)) \right]_0^{2\pi} \\
 &= \frac{1}{2} (2\pi + \pi - 0) = \frac{\mathbf{3\pi}}{\mathbf{2}}
 \end{aligned}$$

Beispiel 2.1.10. Die Funktion $f(x) = e^{-x^2}$ besitzt keine elementare Stammfunktion. Interessanterweise lässt sich dennoch das bestimmte uneigentliche Integral^a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \tag{2.1}$$

berechnen. Dieses Integral tritt sehr häufig auf und soll in diesem Beispiel bestimmt werden, obwohl es sich nicht um ein Doppelintegral handelt. Warum es dennoch in diesen Abschnitt passt, zeigt die nachfolgende Rechnung. Diese Herleitung ist nicht 100%ig exakt, weil etwas feiner argumentiert werden muss, warum die auftretenden Integrale konvergieren. Für unsere Absichten soll es aber genügen.

Wir beginnen mit der Definition

$$I := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

und betrachten das Quadrat dieses Ausdrucks:

$$\begin{aligned} I^2 &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy \right) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \end{aligned}$$

Dieses Integral erstreckt sich über die ganze Ebene \mathbb{R}^2 . Wir wechseln zu Polarkoordinaten und rechnen weiter

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r d\varphi dr = \int_0^{+\infty} \left[\varphi r e^{-r^2} \right]_0^{2\pi} dr \\ &= 2\pi \int_0^{+\infty} r e^{-r^2} dr = 2\pi \int_0^{+\infty} e^{-u} \frac{du}{2} \\ &= \pi \left[-e^{-u} \right]_0^{+\infty} = -\pi(0 - 1) = \pi \end{aligned}$$

Somit erhalten wir als Lösung für das Integral (2.1)

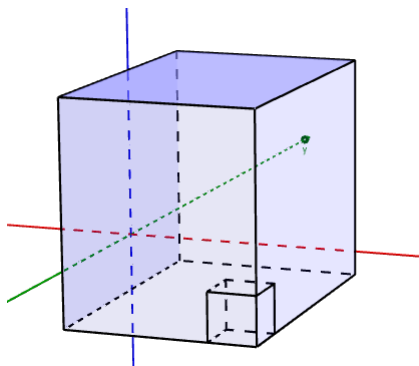
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = I = \sqrt{\pi}$$

^aDas sogenannte *Gaußsche-Integral*.

2.2 Dreifachintegrale

Es ist ohne Probleme möglich die Integration auf noch höhere Dimensionen auszudehnen. Wir wollen hier Dreifachintegrale besprechen, die in der Technik häufig vorkommen.

Als Motivation zur nachfolgenden Begriffsbildung betrachten wir den unten abgebildeten Quader, der in viele kleine Quader unterteilt wird.



Einer der kleinen Quader hat das Volumen $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$. Die Dichte ρ des kleinen Quaders bezeichnen wir mit $\rho(x_i; y_j; z_l)$, da sie nicht konstant ist, sondern vom Ort im großen Quader abhängt. Hierbei denke man z.B. an einen Holzblock oder andere inhomogene Materialien.

Die gesamte Masse des Quaders erhalten wir dann näherungsweise durch die Berechnung von

$$m \approx \sum_{i=1}^{n_z} \sum_{j=1}^{n_y} \sum_{l=1}^{n_x} \rho(x_l; y_j; z_i) \cdot \Delta V$$

Mit den Grenzübergängen $\Delta V \rightarrow 0$ und $n_x, n_y, n_z \rightarrow \infty$ erhalten wir die exakte Masse

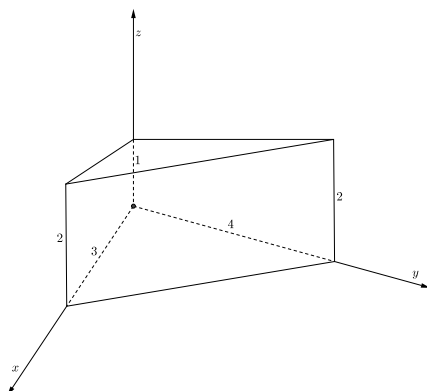
$$m = \lim_{\substack{\Delta V \rightarrow 0 \\ n_x, n_y, n_z \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^{n_z} \sum_{j=1}^{n_y} \sum_{l=1}^{n_x} \rho(x_l; y_j; z_i) \cdot \Delta V =: \iiint_V \rho(x; y; z) \cdot dx dy dz$$

Eine geometrische Interpretation des Dreifachintegrals ist nicht mehr möglich, da wir schon drei Dimensionen brauchen, um den Definitionsbereich darzustellen. Damit wäre eine vierte Dimension notwendig, um "über" jedem Punkt des Definitionsbereich eine "Höhe" einzuzeichnen.

Physikalisch jedoch gibt es eine Fülle von Interpretationsmöglichkeiten, z.B. jene der Masse eines Körpers mit Dichte $\rho(x; y; z)$ oder diverse physikalische *Momente*.

Beispiel 2.2.1.

Zu bestimmen ist das Volumen des abgebildeten Körpers mit Hilfe eines Dreifachintegrals.



Zuerst müssen wieder die Grenzen bestimmt werden.

$$0 \leq x \leq 3$$

$$0 \leq y \leq \frac{-4x}{3} + 4 \quad (\text{Gerade in der } xy\text{-Ebene})$$

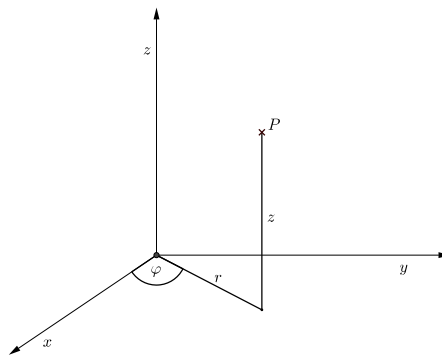
$$0 \leq z \leq \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y + 1 \quad (\text{Ebene der oberen Begrenzungsfläche})$$

Berechnung des Volumens durch Integration konstanter Dichte $\rho(x; y; z) = 1$.

$$\begin{aligned} \int_0^3 \int_0^{-\frac{4}{3}x+4} \int_0^{\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}y+1} 1 \, dz \, dy \, dx &= \int_0^3 \int_0^{-\frac{4}{3}x+4} \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y + 1 \right) \, dy \, dx = \int_0^3 \left[\frac{1}{3}xy + \frac{1}{8}y^2 + y \right]_0^{-\frac{4}{3}x+4} \, dx \\ &= \int_0^3 \left(\frac{-2}{9}x^2 - \frac{4}{3}x + 6 \right) \, dx = \left[-\frac{2}{27}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + 6x \right]_0^3 = \mathbf{10} \end{aligned}$$

2.2.1 Zylinderkoordinaten

Neben den üblichen kartesischen Koordinaten existieren im \mathbb{R}^3 zwei weitere wichtige Darstellungsformen. Wir wenden uns zunächst den *Zylinderkoordinaten* zu. Sie entstehen dadurch, dass die x - und y -Koordinaten in Polardarstellung geschrieben werden, die z -Koordinate aber keine Veränderung erfährt.



Umrechnung der Zylinderkoordinaten:

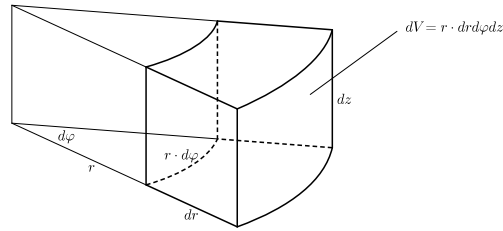
$$x = r \cdot \cos(\varphi)$$

$$y = r \cdot \sin(\varphi)$$

$$z = z$$

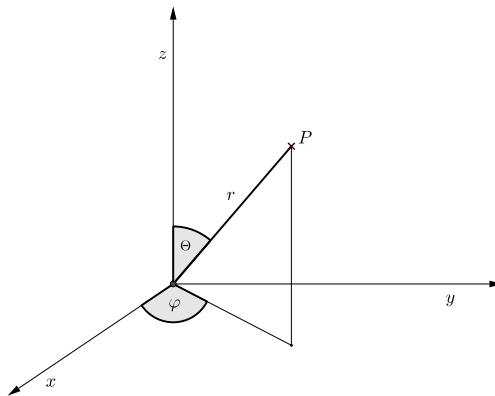
Sollen Integrationen bzgl. Zylinderkoordinaten durchgeführt werden, so muss wieder das Volumenelement $dV = dx \, dy \, dz$ transformiert werden. Ohne strenge Herleitung lesen wir aus der folgenden Skizze das transformierte Volumenelement dV ab.³

³Die exakte Herleitung ist wieder in Abschnitt 2.3 zu finden.



2.2.2 Kugelkoordinaten

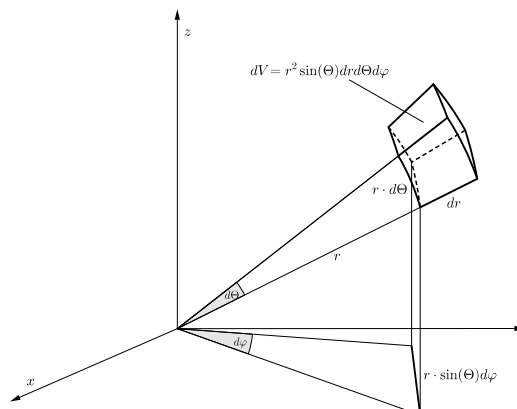
Die zweite wichtige Koordinatendarstellung sind die sogenannten *Kugelkoordinaten*. Hier wird ein Punkt P mit seinem Abstand zum Ursprung ($= r$) und zwei Winkeln beschrieben, die die Neigung zur x - bzw. z - Achse angeben.



Die Umrechnung erfolgt über die folgenden Formeln, die aus den elementaren trigonometrischen Definitionen gewonnen werden können.

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \sin(\Theta) \cdot \cos(\varphi) & \text{mit } \varphi \in [0; 2\pi], \Theta \in [0; \pi] \\ y &= r \cdot \sin(\Theta) \cdot \sin(\varphi) \\ z &= r \cdot \cos(\Theta) \end{aligned}$$

Das für die Integration wichtige Volumenelement dV ist diesmal nicht mehr so einfach zu sehen. Die folgende Skizze versucht deutlich zu machen, wie dieses Volumen berechnet wird.

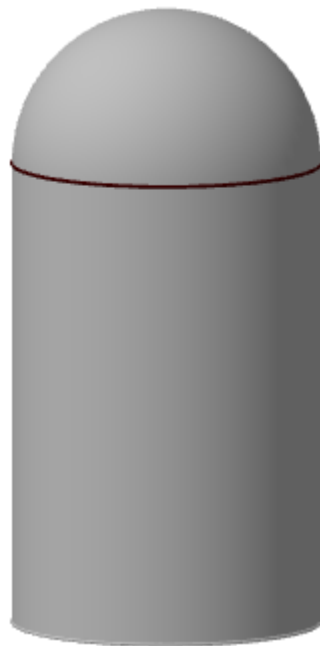


Zur Verdeutlichung der beiden Koordinatentransformationen soll ein Beispiel folgen.

Beispiel 2.2.2. Verwendung von Kugel- und Zylinderkoordinaten.
Gegeben sei der abgebildete Körper, dessen *Massenträgheitsmoment*

$$J_z := \rho \int_V (x^2 + y^2) dV$$

mit $\rho = 10$ berechnet werden soll.



Der Körper besteht aus einem Zylinder ($r = 2; H = 6$) und einer aufgesetzten Halbkugel mit $R = 2$.

Wir teilen das zu berechnende Integral in zwei Summanden auf, entsprechend den einzelnen Körpern.

Zylinder:

$$\begin{aligned} 10 \int_{r=0}^{r=2} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{z=0}^{z=6} (r^2 \cos(\varphi)^2 + r^2 \sin(\varphi)^2) r dz d\varphi dr &= 10 \int_{r=0}^{r=2} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{z=0}^{z=6} r^3 (\cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2) dz d\varphi dr \\ &= 10 \int_{r=0}^{r=2} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{z=0}^{z=6} r^3 dz d\varphi dr = 10 \int_{r=0}^{r=2} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} [r^3 z]_0^6 d\varphi dr = 10 \int_{r=0}^{r=2} [6r^3 \varphi]_0^{2\pi} \\ &= 10 \int_{r=0}^{r=2} 12r^3 \pi dr = 10 \cdot 48\pi = \mathbf{480\pi} \end{aligned}$$

Halbkugel:

$$\begin{aligned}
 & 10 \int_{r=0}^{r=2} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{\Theta=0}^{\Theta=\frac{\pi}{2}} (r^2 \cos(\varphi)^2 \sin(\Theta)^2 + r^2 \sin(\varphi)^2 \sin(\Theta)^2) r^2 \sin(\Theta) d\Theta d\varphi dr \\
 &= 10 \int_{r=0}^{r=2} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{\Theta=0}^{\Theta=\frac{\pi}{2}} r^4 (\cos(\varphi)^2 \sin(\Theta)^2 + \sin(\varphi)^2 \sin(\Theta)^2) \sin(\Theta) d\Theta d\varphi dr \\
 &= 10 \int_{r=0}^{r=2} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{\Theta=0}^{\Theta=\frac{\pi}{2}} r^4 \sin(\Theta)^3 d\Theta d\varphi dr = 10 \int_{r=0}^{r=2} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} r^4 \left[-\cos(\Theta) + \frac{\cos^3(\Theta)}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi dr \\
 &= 10 \int_{r=0}^{r=2} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} r^4 \frac{2}{3} d\varphi dr = 10 \int_{r=0}^{r=2} r^4 \left[\frac{2}{3} \varphi \right]_0^{2\pi} dr \\
 &= 10 \int_{r=0}^{r=2} \frac{4\pi}{3} r^4 dr = \frac{40\pi}{3} \left[\frac{r^5}{5} \right]_0^2 = \frac{256\pi}{3}
 \end{aligned}$$

Insgesamt beträgt das Massenträgheitsmoment

$$J_z = 480\pi + \frac{256\pi}{3} = \frac{1696\pi}{3} \approx 1776,047$$

2.3 Herleitung der Flächen- und Volumenelemente

Wir haben zur Bestimmung der Flächenelemente dA rein geometrische Überlegungen verwendet. Bei komplizierteren Koordinatentransformationen ist dies nicht mehr möglich. Mathematisch exakt erhält man die Flächenelemente aus dem *Transformationssatz*. Dieser besagt, dass der Betrag der Determinante der Jacobi-Matrix unseren gesuchten Flächenelementen entspricht. Der Beweis des Satzes ist relativ lang und wird hier nicht geführt. Der Transformationssatz verallgemeinert die bekannte Substitutionsregel der eindimensionalen Integralrechnung auf mehrere Dimensionen.

- **Polarkoordinaten:**

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\det \left(\frac{\partial(x; y)}{\partial(r; \varphi)} \right) = \begin{vmatrix} \cos(\varphi) & -r \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) \end{vmatrix} = r \cos^2(\varphi) + r \sin^2(\varphi) = r$$

Damit erhalten wir für Polarkoordinaten $dA = r dr d\varphi$.

Drehen wir die Reihenfolge der Ableitungen um, so erhalten wir

$$\begin{vmatrix} -r \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \\ r \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \end{vmatrix} = -r \sin^2(\varphi) - r \cos^2(\varphi) = -r$$

In diesem Fall muss der Betrag $|-r| = r$ berücksichtigt werden.

- **Zylinderkoordinaten:**

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$$

$$\det \left(\frac{\partial(x; y; z)}{\partial(r; \varphi; z)} \right) = \begin{vmatrix} \cos(\varphi) & -r \sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \cos^2(\varphi) + r \sin^2(\varphi) = r$$

Für Zylinderkoordinaten erhalten wir wie erwartet das Volumenelement $dV = r dr d\varphi dz$.

- **Kugelkoordinaten:**

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \sin(\Theta) \cdot \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\Theta) \cdot \sin(\varphi) \\ r \cdot \cos(\Theta) \end{pmatrix}$$

$$\det \left(\frac{\partial(x; y; z)}{\partial(r; \Theta; \varphi)} \right) = \begin{vmatrix} \sin(\Theta) \cos(\varphi) & r \cos(\Theta) \sin(\varphi) & -r \sin(\Theta) \sin(\varphi) \\ \sin(\Theta) \sin(\varphi) & r \cos(\Theta) \cos(\varphi) & r \sin(\Theta) \cos(\varphi) \\ \cos(\Theta) & -r \sin(\Theta) & 0 \end{vmatrix} = r^2 \sin(\Theta)$$

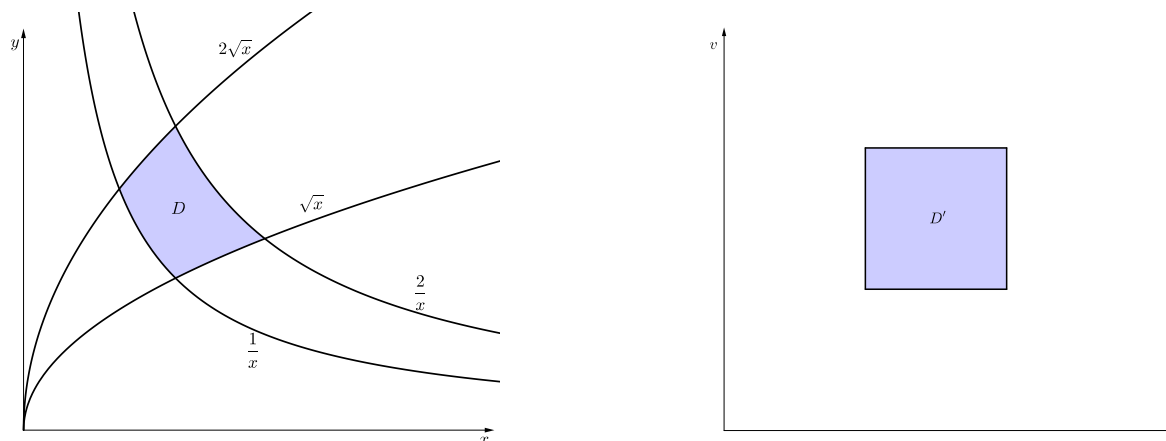
Für Kugelkoordinaten lautet das Volumenelement $dV = r^2 \sin(\Theta) dr d\Theta d\varphi$. Bei dieser Koordinatentransformation gilt $\Theta \in [0; \pi]$ und für solche Winkel ist die Sinusfunktion immer positiv. Damit kann der Betrag weggelassen werden.

Beispiel 2.3.1. Um eine neue Koordinatentransformation kennenzulernen, soll das Integral

$$\int_D y \sqrt{x} dA$$

berechnet werden. Das Gebiet D sei gegeben mit

$$D = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2: x, y > 0 \wedge \sqrt{x} < y < 2\sqrt{x} \wedge \frac{1}{x} < y < \frac{2}{x}\}$$



In der oben dargestellten Abbildung ist das Gebiet D links in kartesischen-, rechts in den neu zu berechnenden Koordinaten dargestellt. Wir könnten das ursprüngliche Integrationsgebiet aufteilen und in kartesischen Koordinaten rechnen. Dabei würden die begrenzenden Funktionen als Integrationsgrenzen auftreten. Führen wir zuerst eine Koordinatentransformation durch, kann das Gebiet D in eine geradlinig begrenzte Fläche (Rechteck) umgewandelt werden und es sind nur noch zwei bestimmte Integrale mit konstanten Grenzen zu bestimmen.

Um eine geeignete Transformation zu finden, formen wir die beiden Bedingungen des Gebiets D um:

$$1 < xy < 2 \qquad 1 < \frac{y}{\sqrt{x}} < 2$$

Offensichtlich besteht eine gute Wahl der neuen Koordinaten in $u = xy$ und $v = \frac{y}{\sqrt{x}}$. Unsere Transformation hat die Darstellung

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ \frac{y}{\sqrt{x}} \end{pmatrix}$$

Umgekehrt erhalten wir nach kurzer Rechnung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^{\frac{2}{3}}v^{-\frac{2}{3}} \\ u^{\frac{1}{3}}v^{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} \qquad 1 < u, v < 2$$

Da die Umrechnung zwischen den Koordinatensystemen eindeutig ist, handelt es sich um eine bijektive Transformation^a. Wäre dies nicht möglich gewesen, hätten wir eine andere Darstellung suchen müssen. Um das neue Integral berechnen zu können, brauchen wir noch die Funktionaldeterminante:

$$\det \left(\frac{\partial(x; y)}{\partial(u; v)} \right) = \begin{vmatrix} \frac{2}{3}u^{-\frac{1}{3}}v^{-\frac{2}{3}} & -\frac{2}{3}u^{\frac{2}{3}}v^{-\frac{5}{3}} \\ \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}v^{\frac{2}{3}} & \frac{2}{3}u^{\frac{1}{3}}v^{-\frac{1}{3}} \end{vmatrix} = \frac{4}{9}v^{-1} + \frac{2}{9}v^{-1} = \frac{2}{3v}$$

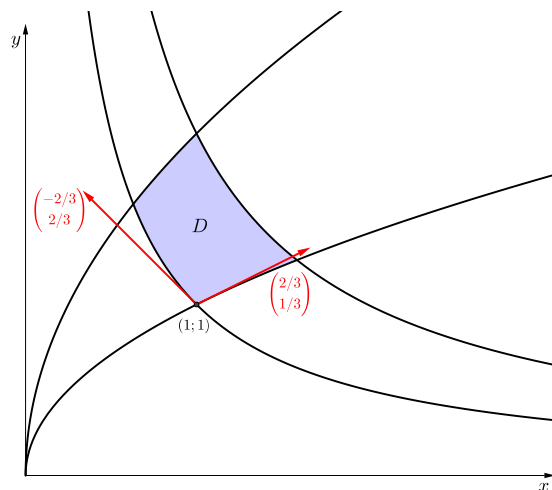
Das Flächenelement lautet $|\frac{2}{3v}|dudv$, wobei wir den Betrag wieder weglassen dürfen, da $v = \frac{y}{\sqrt{x}}$ gilt und laut Angabe $x, y > 0$ vorausgesetzt ist.

Jetzt können wir das Integral ausrechnen:

$$\begin{aligned}
 \int_D y\sqrt{x} \, dA &= \int_{D'} u^{\frac{1}{3}}v^{\frac{2}{3}}u^{\frac{1}{3}}v^{-\frac{1}{3}} \, dA' = \int_1^2 \int_1^2 u^{\frac{1}{3}}v^{\frac{2}{3}}u^{\frac{1}{3}}v^{-\frac{1}{3}} \frac{2}{3v} \, dudv \\
 &= \frac{2}{3} \int_1^2 \int_1^2 u^{\frac{2}{3}}v^{-\frac{2}{3}} \, dudv = \frac{2}{3} \int_1^2 \left[v^{-\frac{2}{3}} \frac{3u^{\frac{5}{3}}}{5} \right]_1^2 \, dv \\
 &= \frac{2}{5} \left(\sqrt[3]{32} - 1 \right) \int_1^2 v^{-\frac{2}{3}} \, dv = \frac{2}{5} \left(\sqrt[3]{32} - 1 \right) \left[3v^{\frac{1}{3}} \right]_1^2 \\
 &= \frac{6}{5} \left(\sqrt[3]{32} - 1 \right) \left(\sqrt[3]{2} - 1 \right) = \frac{6}{5} \left(5 - \sqrt[3]{32} - \sqrt[3]{2} \right) \approx 0,678
 \end{aligned}$$

Abschließend sei noch bemerkt, dass die beiden Integrationsgebiete D und D' nicht den gleichen Flächeninhalt haben. Unsere Koordinatentransformation bildet das krummlinig begrenzte Gebiet D auf das geradlinig begrenzte Gebiet D' ab. Die Gleichheit der beiden Integrale wird durch den Wert der Funktionaldeterminante sichergestellt.

Die Spaltenvektoren der Funktionalmatrix sind die Tangentialvektoren an die Bilder der Koordinatenlinien.



^aDer Transformationssatz verlangt eine *bijektive* Substitutionsfunktion.

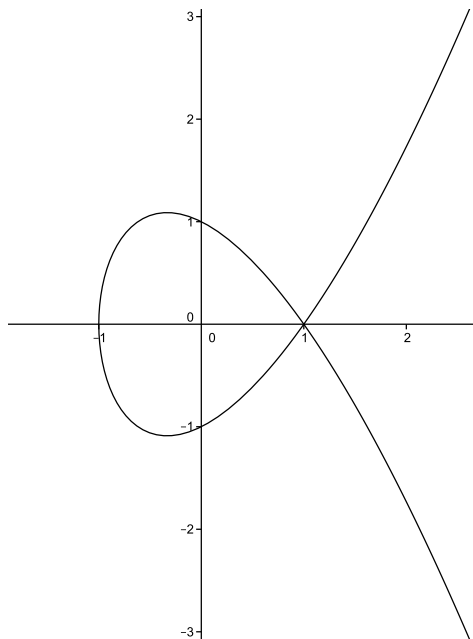
3 Vektoranalysis

In diesem Kapitel werden wir uns zuerst mit *Kurven* in der Ebene und anschließend mit Raumkurven beschäftigen. Dabei werden wir uns mit der Länge und der Krümmung von Kurven auseinandersetzen. Ein Teilziel wird auch sein, die in der Schule oft falsch (zumindest sehr schlampig) formulierte Gleichung “Krümmung = Zweite Ableitung“ richtigzustellen.

3.1 Kurven in Ebene und Raum

Eine *ebene Kurve* ist eine Abbildung $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, also eine Vorschrift, die einer Zahl, dem Parameter, einen Punkt der Ebene zuordnet. Diese Zuordnung ist wieder eindeutig, sonst würde es sich bei f um gar keine Funktion handeln.

Der Graph einer Kurve kann sich dabei erheblich von üblichen Funktionsgraphen unterscheiden, betrachte dazu die abgebildete Kurve.



Hier sehen wir *keinen* Graphen einer Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, denn diese Zuordnung wäre nicht eindeutig. Dem Wert $x = 0$ würden dann die beiden Werte $f(0) = +1$ und $f(0) = -1$ zugeordnet werden. Die Abbildung zeigt den Graphen einer ebenen Kurve, genauer der Funktion

$$\vec{f}(t) : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 - 1 \\ t^3 - 2t \end{pmatrix} \end{cases}, t \in [-2, 2]$$

Bemerkung 3.1.1. Der Vektorpfeil über f wird oft weggelassen, wenn nicht die Vektorwertigkeit der Funktion f deutlich betont werden soll.

Durch Hinzunahme einer weiteren Koordinate z können analog *Raumkurven* beschrieben werden, also Abbildungen der Form

$$\vec{f}(t) = \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \end{cases}$$

Beispiel 3.1.2.

a)

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}$$

Einfache Gerade mit Funktionsgleichung $f(x) = x$.

b)

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} t \\ 2t - 1 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}$$

Einfache Gerade mit Funktionsgleichung $f(x) = 2x - 1$.

c)

$$\vec{r} = 2 \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \quad t \in [0; 2\pi]$$

Kreis mit $M(0; 0)$ und $r = 2$.

d)

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \cos(t) + 1 \\ 3 \sin(t) - 2 \end{pmatrix} \quad t \in [0; 2\pi]$$

Kreis mit $M(1; -2)$ und $r = 3$.

e)

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \cos(t) \\ 4 \sin(t) \end{pmatrix} \quad t \in [0; 2\pi]$$

Eine Ellipse in Hauptlage mit $a = 2$ und $b = 4$.

f)

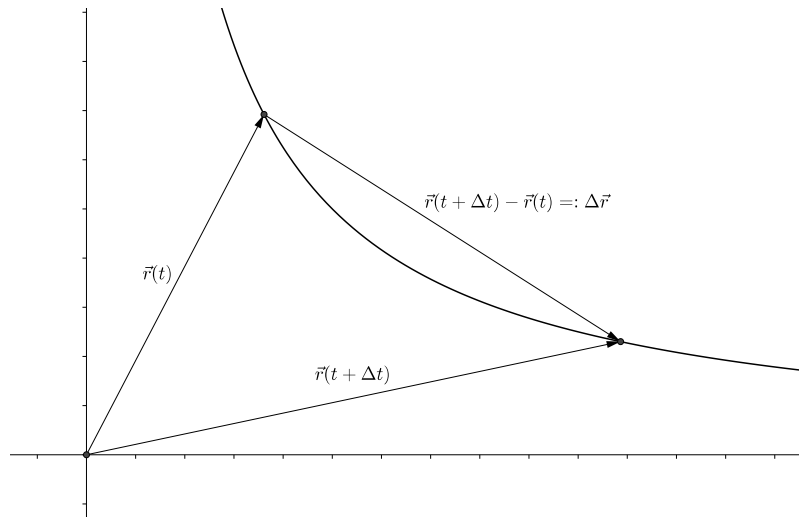
$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \cos(3t) \\ \sin(3t) \\ t \end{pmatrix} \quad t \in [0; 2\pi]$$

Eine im Raum liegende Spirale, die sich um die z -Achse mit drei Windungen in die Höhe schraubt.

3.2 Differenzialrechnung mit Kurven

Wir werden jetzt beginnen für Kurven eine Differenzialrechnung zu entwickeln. Da es sich bei Kurven um vektorwertige Funktionen handelt, spricht man dabei auch von Vektoranalysis.

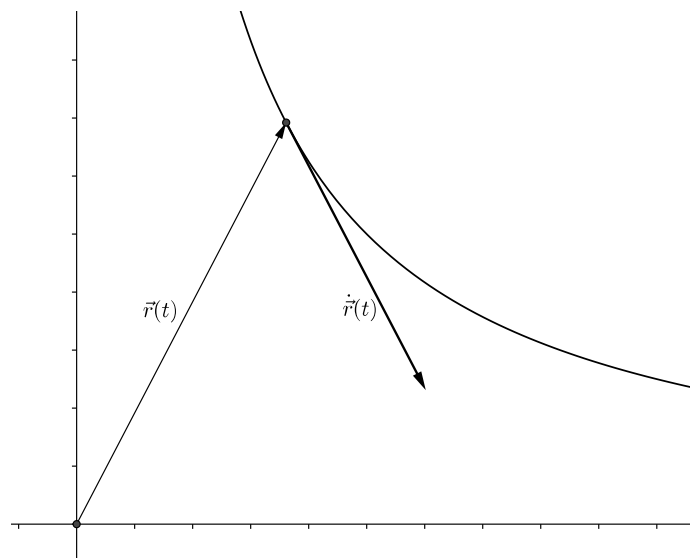
Zuerst werden wir uns damit beschäftigen, was wir unter der Ableitung eines Vektors $\vec{r}(t)$ verstehen werden.



Die Ableitung $\frac{d\vec{r}(t)}{dt}$ wird einfach komponentenweise definiert:

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} := \dot{\vec{r}}(t) := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \begin{pmatrix} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \\ \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}$$

Die geometrische Interpretation liegt auf der Hand, es handelt sich dabei um den Tangentialvektor an die Kurve.



Bemerkung 3.2.1. *Völlig analog wird die Ableitung für Raumkurven definiert:*

$$\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}$$

In naturwissenschaftlichen Anwendungen wird die Notation gelegentlich auch mit Hilfe von Basisvektoren vorgenommen. Ohne genauer darauf einzugehen, sei an dieser Stelle nur die Darstellung mit den kanonischen Einheitsvektoren gezeigt:

$$\dot{\vec{r}}(t) = \dot{x}(t) \cdot \vec{e}_x + \dot{y}(t) \cdot \vec{e}_y + \dot{z}(t) \cdot \vec{e}_z$$

$$\text{mit } \vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 3.2.2. Bestimmen der Ableitungen.

a)

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix}$$

b)

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \cos(t) \\ t \sin(t) \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) - t \sin(t) \\ \sin(t) + t \cos(t) \\ 2e^{2t} \end{pmatrix}$$

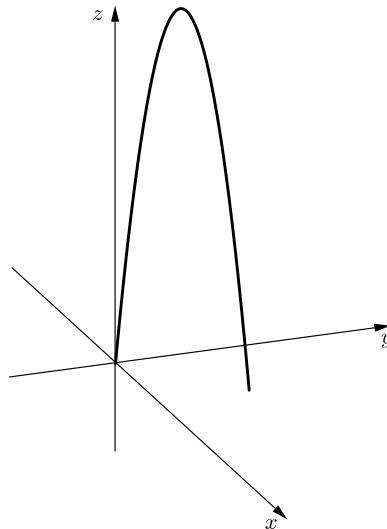
Bemerkung 3.2.3. *Es ist bemerkenswert, dass in Beispiel 3.2.2 a) der Tangentenvektor gleich dem Nullvektor werden kann (für $t = 0$).*

Die Kurve hat dort anschaulich gesprochen einen "Knick". Solche Punkte einer Kurve werden singuläre Kurvenpunkte genannt.

Beispiel 3.2.4. Die Flugbahn eines Objekts sei durch den Ortsvektor

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ -t^2 + 30t \end{pmatrix}, t \in [0; 30]$$

gegeben. Wir berechnen den Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}(t)$ und den Beschleunigungsvektor $\vec{a}(t)$.



Die gesuchten Vektoren erhalten wir direkt durch Differenziation des Ortsvektors $\vec{r}(t)$:

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2t + 30 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Der Beschleunigungsvektor zeigt *konstant* in die negative z -Richtung. Der Geschwindigkeitsvektor ist nur in der x - und y -Komponente konstant, die Geschwindigkeit in z -Richtung hängt vom Beobachtungszeitpunkt t ab.

Wir berechnen noch den Zeitpunkt der maximalen und minimalen Geschwindigkeit und deren Werte^a.

$$|\vec{v}(t)| \longrightarrow \text{max/min}$$

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2t + 30)^2} = \sqrt{4t^2 - 120t + 905}$$

Der Wurzelausdruck wird extremal wenn der Radikant ein Extremum erreicht. Dieser ist eine konvexe quadratische Funktion, wir werden über die erste Ableitung also ein *Minimum* erhalten.

$$8t - 120 = 0$$

$$t = 15$$

$$|\vec{v}(15)| = \sqrt{4 \cdot (15)^2 - 120 \cdot 15 + 905} = \sqrt{5} \approx 2,236$$

Die minimale Geschwindigkeit beträgt 2,236 und wird im Scheitelpunkt erreicht. Die maximale Geschwindigkeit ist ein *Randextremum* und wird für $t = 0$ bzw. $t = 30$ angenommen.

$$|\vec{v}(0)| = \sqrt{0 - 0 + 905} \approx 30,08$$

$$|\vec{v}(30)| = \sqrt{3600 - 3600 + 905} = \sqrt{905} \approx 30,08$$

Beim Abschuss bzw. Aufprall des Objekts ist die Geschwindigkeit am größten.

^aDiese könnten auch direkt aus der Formel für $\vec{v}(t)$ abgelesen werden.

3.2.1 Bogenlänge einer Kurve

Für eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in expliziter Form, kann die Länge des Kurvenbogens zwischen zwei Punkten des Graphen durch die Formel

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2} dx \quad (3.1)$$

berechnet werden.

Wir werden diese Formel jetzt in Parameterform überführen. Dazu sei bemerkt, dass die Steigung y' der Tangente in einem Punkt der Kurve, einfach aus dem Tangentenvektor $\dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$ ausgerechnet werden kann. Es gilt definitionsgemäß

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

Wir setzen in Gleichung (3.1) ein und erhalten

$$1 + y'(x)^2 = 1 + \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2 = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}^2}$$

womit sich unser Integral in der Form (Beachte: $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$)

$$\begin{aligned} s &= \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2} dx = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}^2}} \dot{x} \cdot dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \cdot dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\vec{r}}| dt \end{aligned} \quad (3.2)$$

darstellen lässt. Das Differenzial

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = |\dot{\vec{r}}| dt = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| \cdot dt = |d\vec{r}|$$

wird *Bogendifferenzial* genannt. Aus obiger Gleichung folgt direkt

$$|\dot{\vec{r}}| = \frac{ds}{dt} \quad (3.3)$$

Das bedeutet, die **Länge** des Tangentialvektors ist ein Maß für die Änderungsgeschwindigkeit der Bogenlänge. Wir nennen eine Kurve *nach der Bogenlänge parametrisiert*, wenn $|\dot{\vec{r}}(t)| = 1$ für alle t gilt.

Liegt eine Kurve in dieser Form vor, so kann die Bogenlänge (3.2) sehr einfach bestimmt werden:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\vec{r}}| dt = \int_{t_1}^{t_2} 1 \cdot dt = t_2 - t_1$$

Bemerkung 3.2.5. Für Raumkurven gelten analoge Ergebnisse:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\vec{r}}| dt$$

Satz 3.2.6. Sei eine Kurve $\vec{r}(t)$ in einer beliebigen Parametrisierung gegeben. Durch die Gleichung

$$s(t) := \int_0^t |\dot{\vec{r}}(x)| dx \quad (3.4)$$

kann $\vec{r}(t)$ mit dem neuen Parameter s nach der Bogenlänge umparametrisiert werden.

Beweis:

Für $r(s(t))$ gilt die Kettenregel¹

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \implies \frac{dr}{ds} = \frac{dr}{dt} \cdot \frac{dt}{ds}$$

und daraus folgt direkt

$$|\dot{r}(s)| = \left| \frac{dr}{ds} \right| = \left| \frac{dr}{dt} \frac{dt}{ds} \right| = \left| \frac{dr}{dt} \right| \cdot \left| \frac{dt}{ds} \right|$$

und weiter mit Gleichung 3.3

$$|\dot{r}(s)| = |\dot{r}(t)| \cdot \frac{1}{|\dot{r}(t)|} = 1$$

□

Beispiel 3.2.7. Gegeben sei die Parametrisierung eines Kreises durch

$$\vec{r}(t) = r \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

Für diese Parametrisierung gilt $|\dot{\vec{r}}| = r$. Somit liegt keine Parametrisierung nach der Bogenlänge vor. Diese können wir mit Satz 3.2.6 aber leicht erzeugen:

$$s(t) = \int_0^t |\dot{\vec{r}}(x)| dx = \int_0^t r dx = t \cdot r$$

$$\implies t = \frac{s}{r}$$

Die Parametrisierung nach der Bogenlänge hat somit die Gestalt

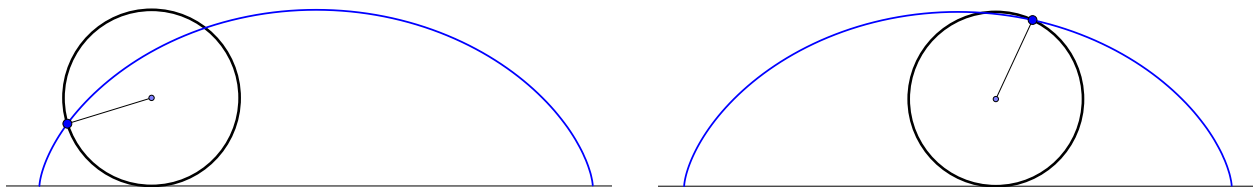
$$\vec{r}(s) = r \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{s}{r}\right) \\ \sin\left(\frac{s}{r}\right) \end{pmatrix}$$

Beispiel 3.2.8. Länge einer *Zykloide*.

Eine Zykloide, auch Rollkurve genannt, ist die Bahn eines Punktes, der auf einem rollenden Kreis liegt. Die Parametrisierung einer solchen Zykloide sei gegeben durch

$$\vec{r}(t) = R \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0; 2\pi]$$

¹Die Vektorpfeile werden aufgrund der leichteren Lesbarkeit weggelassen.

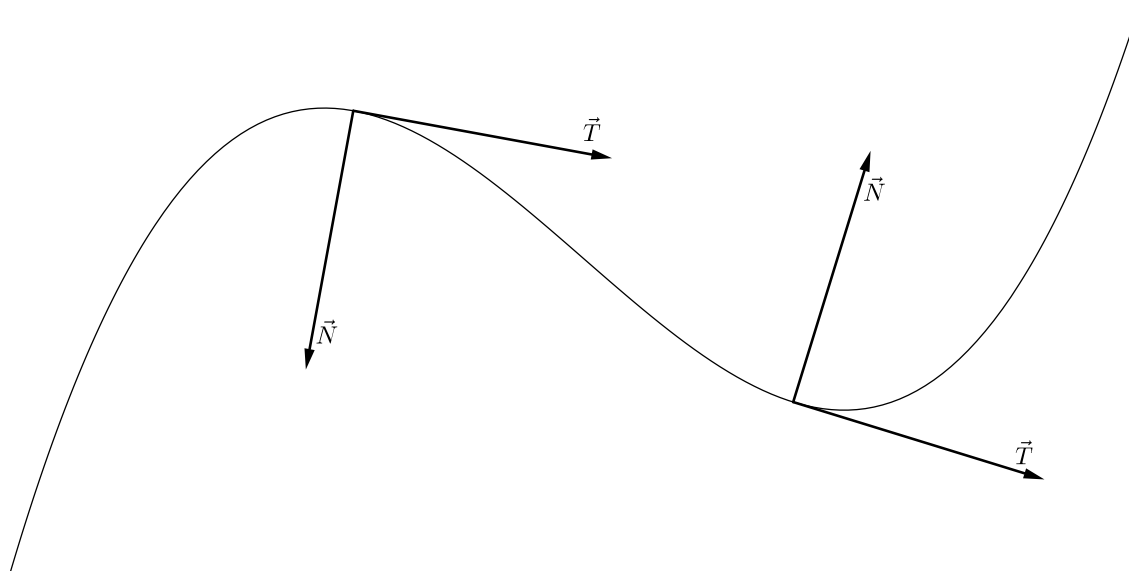


Wir bestimmen zuerst den Term $|\dot{\vec{r}}(t)|$ und führen anschließend die Integration durch.

$$\begin{aligned}
 |\dot{\vec{r}}| &= \left| R \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \right| = R\sqrt{(1 - \cos(t))^2 + \sin(t)^2} = R\sqrt{2(1 - \cos(t))} \\
 &= R\sqrt{2 \cdot 2 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} = 2R \cdot \sin\left(\frac{t}{2}\right) \\
 s &= \int_0^{2\pi} |\dot{\vec{r}}| dt = \int_0^{2\pi} 2R \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt = 2R \left[-2 \cos\left(\frac{t}{2}\right) \right]_0^{2\pi} = 8R
 \end{aligned}$$

3.2.2 Krümmung einer Kurve

Bei der Untersuchung von Kurven hat sich herausgestellt, dass zwei Vektoren besondere Bedeutung zukommt. Wir werden sie beide in diesem Abschnitt kennen lernen und ihren Zusammenhang mit der Kurvenkrümmung herleiten. Den ersten wichtigen Vektor haben wir bereits kennengelernt, es ist der Tangentenvektor an die Kurve.



Definition 3.2.9. Sei $\vec{r}(t)$ eine Kurve in Parameterdarstellung. Den Vektor

$$\vec{T} := \frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|}$$

nennen wir den *Tangenteneinheitsvektor* der Kurve \vec{r} . Seine Länge ist definitionsgemäß gleich 1.

In der oben abgebildeten Skizze ist schon der zweite wichtige Vektor eingezeichnet, den wir jetzt herleiten wollen. Er steht normal auf den Tangenteneinheitsvektor und hat ebenfalls Länge 1. Wir gehen von der Gleichung $\vec{T} \cdot \vec{T} = 1$ aus, die wir nach der Produktregel² differenzieren. Die Gültigkeit der Gleichung folgt direkt aus den Eigenschaften des Skalarprodukts und der Länge von \vec{T} .

$$\begin{aligned}\vec{T} \cdot \vec{T} &= 1 \\ \frac{d\vec{T}}{dt} \cdot \vec{T} + \vec{T} \cdot \frac{d\vec{T}}{dt} &= 0 \\ 2 \cdot \vec{T} \cdot \frac{d\vec{T}}{dt} &= 0 \\ \vec{T} \cdot \dot{\vec{T}} &= 0\end{aligned}$$

Aus der letzten Gleichung folgt sofort, dass \vec{T} und $\dot{\vec{T}}$ normal aufeinander stehen! Wir können unseren zweiten wichtigen Vektor also mithilfe von $\dot{\vec{T}}$ definieren.

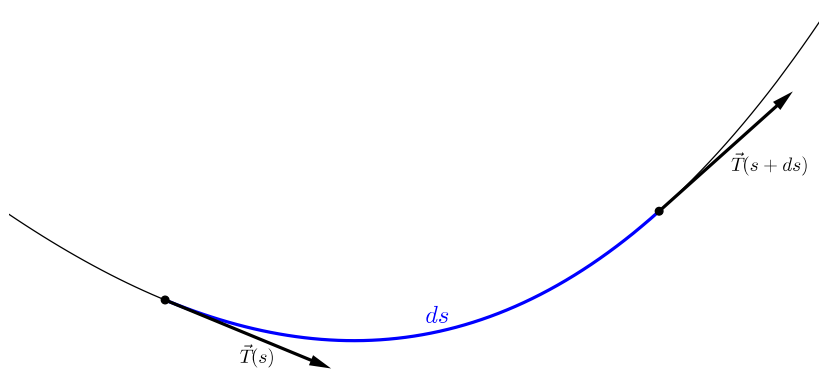
Definition 3.2.10. *Der Vektor*

$$\vec{N} := \frac{\dot{\vec{T}}}{|\dot{\vec{T}}|}$$

wird *Hauptnormaleneinheitsvektor* genannt. Er steht senkrecht auf \vec{T} und hat definitionsgemäß die Länge 1.

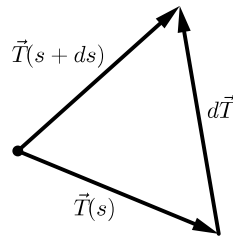
Liegt die Parametrisierung einer Kurve nach der Bogenlänge vor, so verwenden wir immer formal die Darstellung $\vec{r}(s)$.

Der Vektor $\dot{\vec{T}}(s) = \frac{d\vec{T}}{ds}$ ist die Änderungsgeschwindigkeit des Tangenteneinheitsvektors. Schreiten wir um das Bogendifferenzial ds fort, so ändert sich \vec{T} um $d\vec{T} = \dot{\vec{T}}(s) \cdot ds$.



Aus den Vektoren $\vec{T}(s)$ und $\vec{T}(s+ds)$ konstruieren wir die Differenz $d\vec{T}$.

²Sie gilt analog für Skalarprodukte.



Ist $d\vec{T}$ der Nullvektor, so hat die Kurve einen geradlinigen Verlauf, oder anders ausgedrückt, die Kurve krümmt sich nicht. Je größer $d\vec{T}$ ist, desto stärker weicht die Kurve von einem geradlinigen Verlauf ab, krümmt sich also anschaulich stärker.

Wir sind nun in der Lage, die Krümmung einer Kurve in eine exakte Definition zu packen.

Definition 3.2.11. Sei eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve $\vec{r}(s)$ gegeben und \vec{T} ihr Tangenteneinheitsvektor.

Wir nennen

$$\kappa(s) := \left| \frac{d\vec{T}}{ds} \right| = \left| \dot{\vec{T}} \right|$$

die *Kurvenkrümmung* und

$$\rho(s) := \frac{1}{\kappa(s)}$$

den *Krümmungsradius* der Kurve.

Insgesamt können wir folgende Gleichung festhalten:

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \dot{\vec{T}}(s) = \kappa \cdot \vec{N} \quad (\kappa \geq 0)$$

Satz 3.2.12. Ist $\vec{r}(t)$ eine beliebige Parametrisierung einer Raumkurve, so gilt die Gleichung

$$\kappa(t) = \frac{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|^3} \quad (\dot{\vec{r}} \neq 0)$$

Bemerkung 3.2.13. Die Krümmung κ einer Kurve ist eine **positive** reelle Zahl. In unserer Definition macht es vorerst gar keinen Sinn, von positiver oder negativer Krümmung zu sprechen.

Die Definition wurde bewusst so gewählt, da es bei Raumkurven auch sinnlos wäre, eine Krümmungsrichtung festzulegen. Soll die Krümmung vorzeichenbehaftet sein, so kann dies nur bei ebenen Kurven geschehen.

Zum Schluss sei noch der Zusammenhang mit der zweiten Ableitung $f''(x)$ einer Funktion erläutert. Dazu verwenden wir Satz 3.2.12.

Satz 3.2.14. Aus Satz 3.2.12 erhalten wir eine Formel zu Berechnung der Krümmung für ebene

$$\text{Kurven } \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\tilde{\kappa}(t) = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}y}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.5)$$

Dieser Ausdruck für $\tilde{\kappa}(t)$ ist jetzt vorzeichenbehaftet!

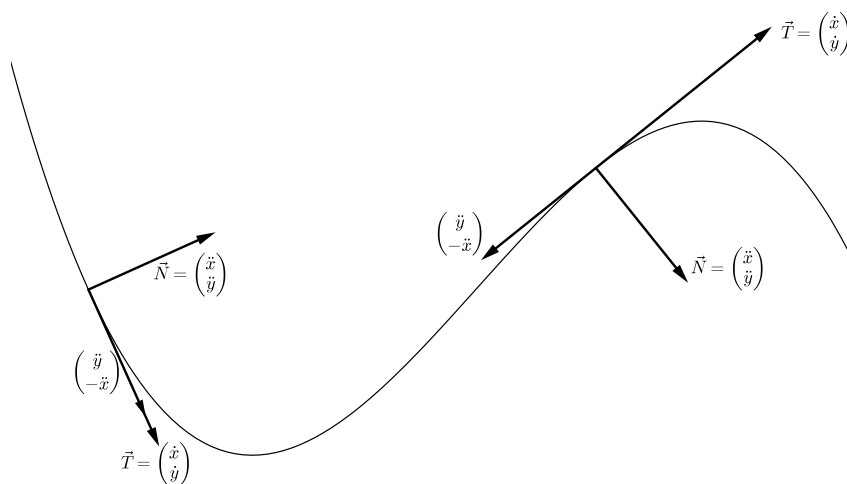
Der Nenner ist immer positiv, hat also keinen Einfluss auf das Vorzeichen. Den Zähler betrachten wir jetzt ein wenig näher und erkennen, dass hier ein Skalarprodukt steht, nämlich

$$\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ddot{y} \\ -\ddot{x} \end{pmatrix}$$

Wir sehen weiter, dass der Vektor $\begin{pmatrix} \ddot{y} \\ -\ddot{x} \end{pmatrix}$ der um 90° nach rechts gedrehte Normalvektor $\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix}$ auf \vec{T} ist. Somit sind $\begin{pmatrix} \ddot{y} \\ -\ddot{x} \end{pmatrix}$ und \vec{T} parallel.

Wir durchlaufen eine Kurve jetzt von links nach rechts. Verläuft die Kurve beispielsweise *im Uhrzeigersinn* (nach rechts), so zeigt der Vektor $\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix}$ auch auf die rechte Seite von \vec{T} . Drehen wir $\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix}$ um 90° nach rechts, so hat er die entgegengesetzte Orientierung zu \vec{T} . Das Skalarprodukt ist in diesem Fall negativ und damit auch die Krümmung $\tilde{\kappa}$.

Das ist der Grund, warum eine negative Krümmungen auch als Krümmung *im Uhrzeigersinn* bezeichnet wird. Analoges gilt natürlich für eine positive Krümmung und den Verlauf *gegen den Uhrzeigersinn*.



Wir übertragen unser Ergebnis jetzt auf Kurven, die in der Form $y = f(x)$ gegeben sind.

Sei eine Funktion $f(x)$ gegeben, können wir sie mit $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$ in Parameterform bringen. Einsetzen in Formel 3.5 liefert

$$\tilde{\kappa}(t) = \frac{1 \cdot f''(t) - 0}{(1 + f'(t)^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{f''(t)}{(1 + f'(t)^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.6)$$

Der Nenner ist natürlich wieder stets positiv, liefert also keinen Beitrag zum Vorzeichen der Krümmung. Ob die Funktion in einem Kurvenpunkt negativ oder positiv gekrümmt ist, hängt also nur vom Zähler $f''(t)$ ab.

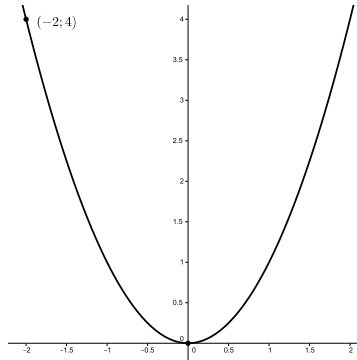
Zusammenfassung:

Aus der zweiten Ableitung $f''(x)$ einer Funktion erhalten wir eine *qualitative* Aussage über das Krümmungsverhalten. Eine *quantitative* Aussage, also wie stark die Krümmung tatsächlich ist, erhalten wir nur, wenn der Ausdruck $(1 + f'(x)^2)^{\frac{3}{2}}$ ebenfalls berücksichtigt wird.

Die zweite Ableitung ist also *nicht* gleich der Krümmung der Funktion, sondern erlaubt nur eine Aussage darüber, in welche Richtung die Krümmung verläuft.

Beispiel 3.2.15. Krümmungsverhalten von Kurven.

a) Wir betrachten die Funktion $f(x) = x^2$. Die Ableitungen sind mit $f'(x) = 2x$ und $f''(x) = 2$ gegeben. Schon hier sieht man, dass die zweite Ableitung sicher nicht "die Krümmung" sein kann, denn ein Blick auf den Graphen reicht um zu sehen, dass von konstanter(!) Krümmung nicht die Rede sein kann.



Wir betrachten zuerst den Punkt $(0; 0)$ und bestimmen dort die Krümmung der Kurve nach Formel 3.6

$$\tilde{\kappa}(0) = \frac{2}{(1 + 0^2)^{\frac{3}{2}}} = 2$$

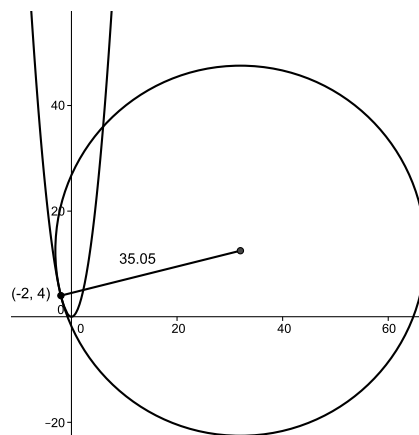
Im Punkt $(-2; 4)$ beträgt die Krümmung hingegen

$$\tilde{\kappa}(-2) = \frac{2}{(1 + (2 \cdot (-2))^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{17^{\frac{3}{2}}} \approx 0,0285$$

Die Krümmung in diesem Punkt ist erwartungsgemäß kleiner als im Ursprung. In beiden Punkten ist die Krümmung positiv, das ist auch genau die Information, die wir aus $f''(x)$ ablesen können, mehr aber nicht.

In Definition 3.2.11 wurde auch der Krümmungsradius ρ als Kehrwert von κ festgelegt. Soll das Verhalten einer Kurve in einem Punkt möglichst gut durch einen *Kreis* angenähert werden, so muss der Radius dieses Kreises genau ρ entsprechen.

In unserem Beispiel ist der Krümmungsradius ρ im Punkt $(-2; 4)$ somit gleich $\rho = \frac{1}{0,0285} \approx 35$.



3.3 Skalarfelder

Wir haben uns schon ausführlich mit Funktionen des Typs $f(x; y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ beschäftigt. Allgemein bezeichnet man Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ als *Skalarfelder*.

Definition 3.3.1. *Funktionen der Form*

$$\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

nennen wir *Skalarfelder*. Im speziellen bezeichnen wir

$$\phi(x; y) : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x; y) \mapsto \phi(x; y) \end{cases}$$

als *ebenes Skalarfeld* und

$$\phi(x; y; z) : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x; y; z) \mapsto \phi(x; y; z) \end{cases}$$

als *räumliches Skalarfeld*.

Praktische Anwendungsbeispiele sind etwa die Temperaturverteilung und der Luftdruck in einem Gebiet, oder die Dichteverteilung in einem Körper.

Beispiel 3.3.2. Wir betrachten das räumliche Skalarfeld

$$\phi(x; y; z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Es ordnet jedem Punkt $(x; y; z)$ im Raum seinen Abstand zum Ursprung zu. Genauso wie Höhenlinien im ebenen Fall, für die gilt $\phi(x; y) = \text{const}$, kann ein analoger Begriff für räumliche Skalarfelder gefunden werden.

Die Menge aller Punkte für die $\phi(x; y; z) = \text{const}$ gilt, heißt *Äquipotentialfläche*. Im konkreten Beispiel haben die Äquipotentialflächen die Form von Kugeln mit Radius const .

3.3.1 Der Gradient

In der Mathematik werden Funktionen speziellen Typs oft mit einem eigenen Namen versehen. Ohne eine exakte Definitionen zu geben, soll anhand eines Beispiels ein solcher Begriff eingeführt werden. Abbildungen des Typs $f(x), g(x; y), \phi(x; y; z)$ usw. haben eine Gemeinsamkeit: Ihre Argumente sind stets Zahlen und ihr Ergebnis besteht auch immer aus Zahlen. Solche Abbildungen haben wir *Funktionen* genannt. Es gibt aber auch Abbildungen, die keine Zahlen als Argumente haben und auch als Ergebnis keine Zahlen liefern. Das mag zuerst etwas eigenartig klingen, dennoch haben wir solche Abbildungen schon die ganze Zeit verwendet.

Beispiel 3.3.3. Sei $f(x) = 3x^2$ gegeben. Wir bilden die erste Ableitung und erhalten $f'(x) = 6x$. Der Punkt an dieser einfachen Rechnung ist, dass wir beim Differenzieren in Wahrheit eine Abbildung verwendet haben. Wir haben $f(x)$ nach ganz bestimmten Regeln auf $f'(x)$ abgebildet.

$$\begin{array}{ll} f(x) \mapsto & f'(x) \\ 3x^2 \mapsto & 6x \end{array}$$

Wir können auch schreiben $f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(f(x))$. Die Abbildung $\frac{d}{dx}$ heißt *Differenzialoperator*.

Er bekommt als Argument keine Zahl, sondern eine ganze Funktion übergeben, liefert auch keine Zahl zurück, sondern wieder eine Funktion.

Werfen wir dem Differenzialoperator $\frac{d}{dx}$ die Funktion $\sin(x)$ zu, so wird er uns die Funktion $\cos(x)$ zurückwerfen.

Ein wichtiger Vertreter der Klasse der Differenzialoperatoren ist der folgende Vektor.

Definition 3.3.4. *Der Operator*

$$\vec{\nabla} := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

wird *Nabla-Operator* genannt.

Wir können den Nabla-Operator jetzt auf ein Skalarfeld anwenden.

Definition 3.3.5. *Sei $\phi(x; y; z)$ ein differenzierbares Skalarfeld. Der Ausdruck*

$$\text{grad}(\phi) := \vec{\nabla} \cdot \phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix}$$

heißt der *Gradient* von ϕ .

Bemerkung 3.3.6. *Es reicht sich an dieser Stelle einfach zu merken: Im Gradienten stehen die partiellen Ableitungen.*

Die besondere Bedeutung des Gradienten beruht auf zwei wichtigen Eigenschaften.

1. Eigenschaft: Der Gradient zeigt immer in die Richtung des steilsten Anstiegs. (vgl. Satz 3.3.9)
2. Eigenschaft: Der Gradient eines Skalarfeldes verläuft stets senkrecht zur Niveaulinie bzw. zur Niveaufläche des Feldes.

Um das einzusehen, betrachten wir das totale Differenzial eines ebene (räumlich funktioniert analog) Skalarfeldes $\phi(x; y)$.

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy$$

$$d\phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \text{grad}(\phi) \cdot d\vec{r}$$

Verschieben wir um $d\vec{r}$ tangential zur Niveaulinie/fläche, so gilt $\phi = \text{const}$ und daher $d\phi = 0$.

$$0 = \text{grad}(\phi) \cdot d\vec{r}$$

Das Skalarprodukt ist gleich 0, die Vektoren sind somit orthogonal³.

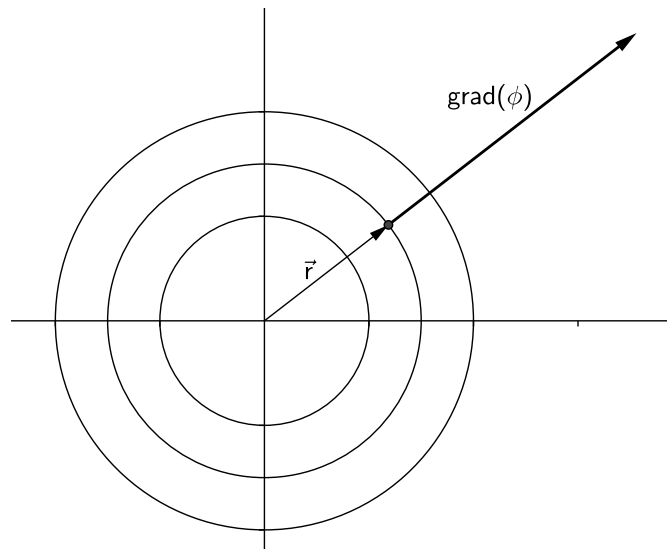
³Wir nehmen an, dass keiner der Vektoren der Nullvektor ist.

Beispiel 3.3.7. Wir berechnen den Gradienten des Skalarfeldes $\phi(x; y) = x^2 + y^2$ und bestimmen die Art der Niveaulinien.

$$\begin{aligned}\phi(x; y) &= \text{const} =: c \\ x^2 + y^2 &= c\end{aligned}$$

Die Niveaulinien sind Kreise mit Mittelpunkt $(0; 0)$ und Radius $r = \sqrt{c}$.
Der Gradient ist gegeben durch

$$\text{grad}(\phi) = \vec{\nabla} \cdot \phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = 2 \cdot \vec{r}$$



Beispiel 3.3.8. Wir berechnen den Gradienten des Skalarfeldes $\phi(x; y; z) = x^2 z^2 + xy^2$ im Punkt $P(1; 1; 2)$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial x} &= \phi_x = 2xz^2 + y^2 \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= \phi_y = 2xy \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} &= \phi_z = 2x^2 z\end{aligned}$$

$$\text{grad}(\phi) = \begin{pmatrix} 2xz^2 + y^2 \\ 2xy \\ 2x^2 z \end{pmatrix} \implies \text{grad}(\phi)|_P = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Wir haben bereits im zweiten Kapitel die *Richtungsableitung* definiert und ein Beispiel dazu gerechnet (Beispiel 1.3.2). Die Richtungsableitung kann jedoch einfacher berechnet werden, als in diesem Beispiel gezeigt. Betrachten wir noch einmal die Angabe und das Ergebnis:

Gegeben war die Funktion $f(x; y) = x^2 + y^2$, sowie der Punkt $(x; y)$ und der Richtungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Die Richtungsableitung im Punkt $(x; y)$ ist dann gegeben durch $f'_v = \frac{1}{\sqrt{2}}(2x + 2y)$.

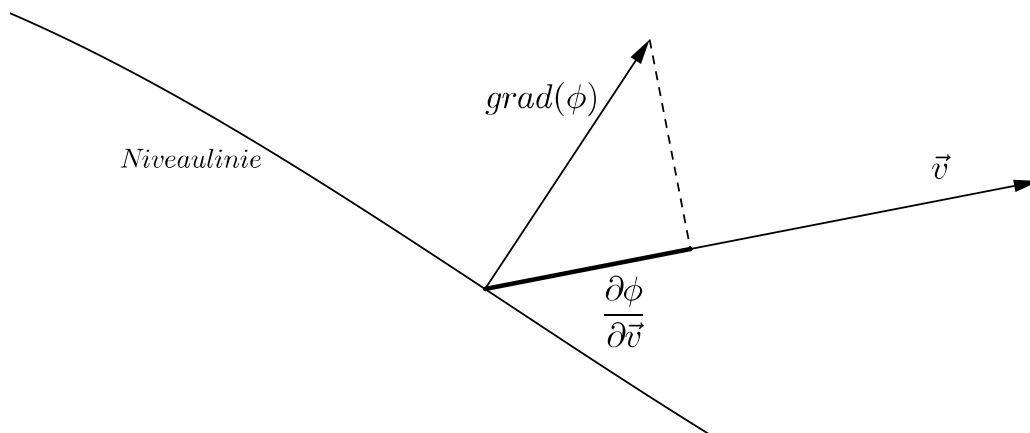
Genaueres Hinsehen nährt die Vermutung, dass hier einfach die partiellen Ableitungen mit \vec{v}_0 multipliziert wurden. In der Tat gilt der folgende Satz:

Satz 3.3.9. Sei ϕ ein total differenzierbares Skalarfeld, so gilt:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \vec{v}} = \text{grad}(\phi) \cdot \vec{e}_v$$

Der Vektor $\vec{e}_v = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ ist der Einheitsvektor (Länge = 1) in Richtung \vec{v} .

Die Interpretation der Richtungsableitung bleibt natürlich gleich, sie gibt die Änderung des Funktionswerts an, wenn man eine Längeneinheit in Richtung \vec{v} fortschreitet.



Aus der Abbildung wird auch ersichtlich, dass der größte Zuwachs des Funktionswerts dann erreicht wird, wenn \vec{v} genau in Richtung des Gradienten zeigt. Das verdeutlicht die erste Eigenschaft des Gradienten, in die Richtung des größten Anstiegs zu zeigen.

Beispiel 3.3.10. Gesucht ist die Richtungsableitung von $\phi(x; y; z) = x^2 y^2 z^2 + 2xz^3$ im Punkt

$P(-1; 1; 1)$ in Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Die Funktion $\Phi(x; y; z)$ ist als Verknüpfung von Polynomfunktionen sicher total differenzierbar, wir können also die Formel aus Satz 3.3.9 verwenden:

$$\phi_x = 2xy^2z^2 + 2z^3$$

$$\phi_y = 2x^2yz^2$$

$$\phi_z = 2x^2y^2z + 6xz^2$$

$$\text{grad}(\phi)|_P = \begin{pmatrix} -2+2 \\ 2 \\ 2-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \vec{v}}|_P = \text{grad}(\phi) \cdot \vec{e}_{\vec{v}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}(0 - 2 - 8) = \frac{-10}{3}$$

Beispiel 3.3.11. Die Voraussetzung der totalen Differenzierbarkeit darf nicht weggelassen werden. Die Funktion

$$f(x; y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & , (x; y) \neq (0; 0) \\ 0 & , (x; y) = (0; 0) \end{cases}$$

liefert ein Gegenbeispiel.

Nähern wir uns entlang der beiden Koordinatenachsen $(0; y)$ und $(x; 0)$ dem Ursprung, so sind immer alle Funktionswerte 0. Da der Funktionswert im Ursprung auch als 0 definiert ist können wir folgern

$$\frac{\partial f(0; 0)}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial f(0; 0)}{\partial y} = 0$$

Würden wir jetzt unsere Formel

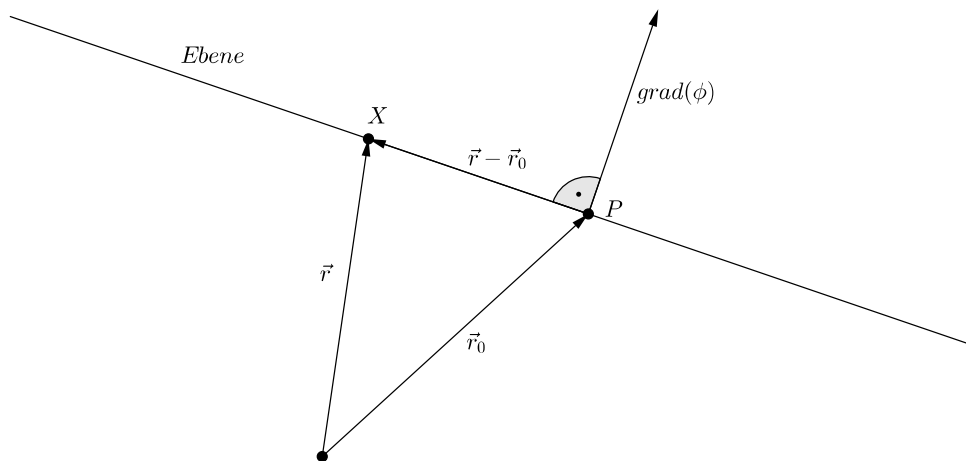
$$\frac{\partial f(0; 0)}{\partial \vec{v}} = \text{grad}(f(0; 0)) \cdot \vec{e}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{e}_v = 0$$

verwenden, so erhalten wir als Resultat, dass die Richtungsableitung in jede beliebige Richtung \vec{v} verschwindet. Das stimmt jedoch nicht, denn die Richtungsableitung im Ursprung in Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ lautet

$$\frac{\partial f(0; 0)}{\partial \vec{v}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\begin{pmatrix} 0+h \cdot 1 \\ 0+h \cdot 1 \end{pmatrix}\right) - f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}{h\sqrt{2}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\begin{pmatrix} h \\ h \end{pmatrix}\right)}{h\sqrt{2}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2h^2}{2h^2}}{h\sqrt{2}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h\sqrt{2}} = \begin{cases} +\infty & , h \searrow 0 \\ -\infty & , h \nearrow 0 \end{cases}$$

Von einer verschwindenden Ableitung in alle Richtungen kann also keine Rede sein. Der Grund liegt an der nicht existierenden totalen Ableitung der Funktion $f(x; y)$. Auch die stärkste Bedingung, die stetig partielle Differenzierbarkeit ist daher natürlich nicht erfüllt, wie sich leicht nachprüfen lässt.

Beispiel 3.3.12. Es sei eine Funktion in der Form $F(x; y; z) = 0$ gegeben. Diese Gleichung kann als Niveaufläche mit $const = 0$ aufgefasst werden. Wir wissen bereits, dass der Gradient auf solche Niveauflächen normal steht. Daraus gewinnen wir eine weitere Formel zur Ermittlung der Tangentialebene.



Aus der Zeichnung erhalten wir den Zusammenhang

$$(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot (\text{grad}(\phi)) = 0$$

Sei z.B. $\phi(x; y; z) = x^2 + y^2 + z^2$ gegeben, so kann die Tangentialebene im Punkt $P(2; 3; 6)$ leicht berechnet werden.

$$\text{grad}(\phi) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \implies \text{grad}(\phi)|_P = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\left(\vec{r} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} x - 2 \\ y - 3 \\ z - 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix} = 0$$

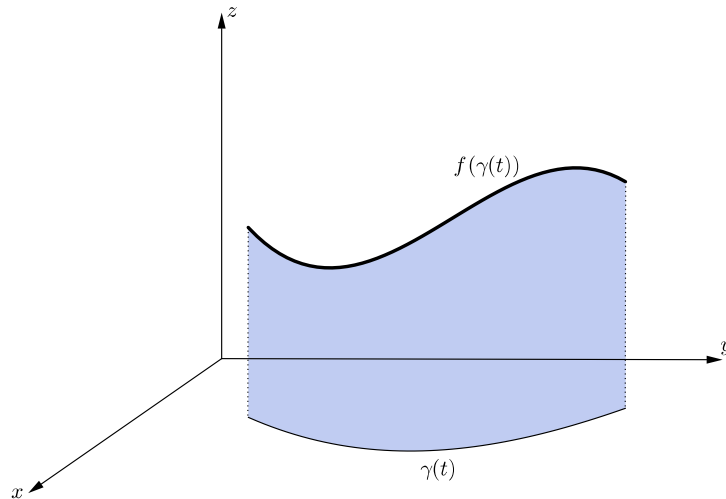
$$4x - 8 + 6y - 18 + 12z - 72 = 0$$

$$\mathbf{2x + 3y + 6z - 49 = 0}$$

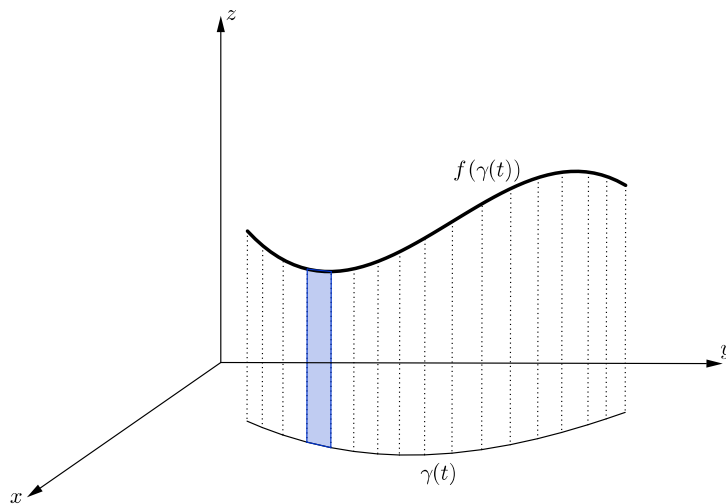
3.3.2 Linien- und Kurvenintegrale (erster Art)

In diesem Abschnitt werden wir den Integrationsbegriff der reellen Analysis für Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ auf Funktionen bzw. Skalarfelder $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ausdehnen.

Der Integrationsbereich wird in höheren Dimensionen kein Intervall mehr sein, sondern durch einen parametrisierten Weg beschrieben. Die geometrische Interpretation soll dabei erhalten bleiben, wir wollen das Kurvenintegral längs eines Weges weiterhin als Fläche zwischen Funktionsgraph und Kurve interpretieren.



Die Idee ist relativ geradeaus. Wir zerlegen den Integrationsweg in viele kleine gerade Stücke und summieren über die entstehenden Rechtecksflächen. Im Grenzfalle erhalten wir das gesuchte Kurvenintegral.



Die infinitesimal kleinen Wegstücke erhalten wir über die Tangentenvektoren der Kurve $\gamma(t)$. Ohne weitere detaillierte Herleitung verwenden wir die folgende Definition.

Definition 3.3.13. Sei eine stetige Funktion $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und ein stetig differenzierbarer Weg $\gamma : [a; b] \rightarrow U$ gegeben. Das *skalare Kurvenintegral* (oder *Kurvenintegral erster Art*) ist definiert als

$$\int_{\gamma} f ds := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot |\gamma'(t)| dt$$

Beispiel 3.3.14. Wir berechnen das Kurvenintegral $I = \int_{\gamma} (x + y^2 + z^3) ds$ von $A(0; 1; 0)$ nach

$B(1; 0; \frac{\pi}{2})$ längs des Weges $\gamma : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ t \end{pmatrix}$.

Lösung:

Aus $\vec{r} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \\ 1 \end{pmatrix}$ erhalten wir direkt $|\dot{\vec{r}}| = \sqrt{2}$. Einsetzen in die Definition des Kurvenintegrals ergibt:

$$\begin{aligned} I &= \int_{\gamma} (x + y^2 + z^3) ds = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t) + \cos(t)^2 + t^3) dt \\ &= \sqrt{2} \left(-[\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^2 dt + \left[\frac{t^4}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \sqrt{2} \left(1 + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi^4}{64} \right) \approx \mathbf{4,677} \end{aligned}$$

Beispiel 3.3.15. Die Kurve $\gamma : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) + 1 \\ \sin(t) + 1 \end{pmatrix}, t \in [0; \pi]$ sei mit einer Ladung der Ladungsdichte $\rho(x; y) = 1 + y$ belegt.

Zu bestimmen ist die Gesamtladung Q durch Auswertung des entsprechenden Kurvenintegrals.

Lösung:

$$\begin{aligned} Q &= \int_{\gamma} \rho(x; y) ds = \int_0^{\pi} (1 + \sin(t) + 1) \cdot \left| \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \right| dt = \\ &= \int_0^{\pi} (2 + \sin(t)) dt = [2t - \cos(t)]_0^{\pi} = 2\pi + 1 - (0 - 1) = \mathbf{2\pi + 2} \end{aligned}$$

Beispiel 3.3.16. Wir bestimmen ein Kurvenintegral in Polarkoordinaten und verwenden die Identität $ds = r \cdot dt$.

Zu Bestimmen ist das Kurvenintegral längs des positiv orientierten Einheitskreises für die Funktion $f(x; y) = x + y$.

Lösung:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f ds &= \int_0^{2\pi} (r \cos(t) + r \sin(t)) r dt = r^2 \int_0^{2\pi} (\cos(t) + \sin(t)) dt \\ &= r^2 [\sin(t)]_0^{2\pi} - r^2 [\cos(t)]_0^{2\pi} = r^2(0 - 0) - r^2(1 - 1) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

3.4 Vektorfelder

Waren uns Skalarfelder schon aus vorangegangenen Fragestellungen vertraut, so kommt jetzt eine echte Neuerung auf uns zu. Wir lassen diesmal als Zielmenge nicht nur reelle Zahlen zu, sondern allgemein den \mathbb{R}^m .

Definition 3.4.1. Eine Funktion des Typs

$$\vec{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

nennen wir ein *Vektorfeld*. Im Speziellen bezeichnen wir eine Funktion der Art

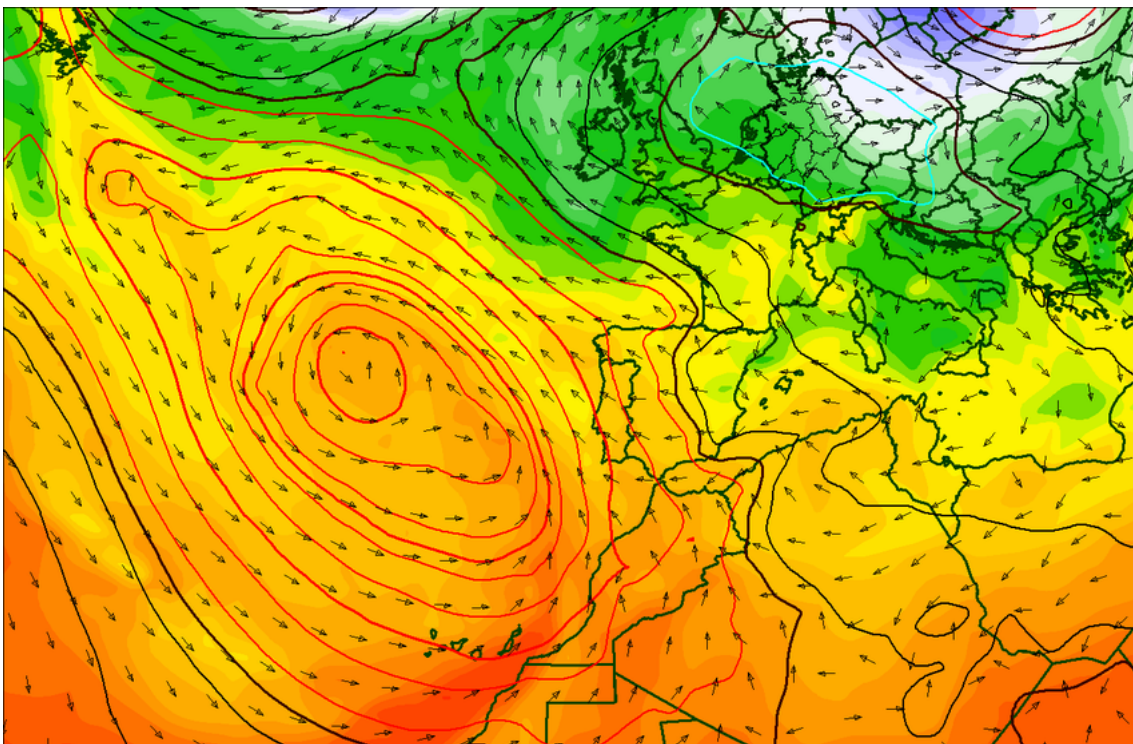
$$\vec{F}(x; y) : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x; y) \mapsto \begin{pmatrix} F_x(x; y) \\ F_y(x; y) \end{pmatrix} \end{cases}$$

als *ebenes Vektorfeld* und

$$\vec{F}(x; y; z) : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x; y; z) \mapsto \begin{pmatrix} F_x(x; y; z) \\ F_y(x; y; z) \\ F_z(x; y; z) \end{pmatrix} \end{cases}$$

als *räumliches Vektorfeld*.

Anschaulich ordnen wir jedem Punkt der Ebene/des Raumes einen Vektor zu. Solche Vektorfelder sind uns allen auch bekannt, obwohl wir sie nicht unter diesem Namen kennen gelernt haben. Eine Wetterkarte für Windgeschwindigkeiten, dient als gutes Beispiel für ein Vektorfeld.



Das Bild zeigt neben den Vektorpfeilen auch noch sogenannte *Feldlinien*. Feldlinien sind Kurven, die in jedem Punkt P durch den zugehörigen Feldvektor in P tangiert werden. Feldlinien können sich nie schneiden, denn in einem Schnittpunkt S würden zwei verschiedene Tangentenvektoren existieren. Das aber widerspricht der Eindeutigkeit des Vektorfeldes, das jedem Punkt einen *eindeutigen* Vektor zuordnet.

Beispiel 3.4.2. Das Gravitationsfeld eines Körpers stellt ein weiteres Beispiel für ein Vektorfeld dar. Nach *Isaac Newton*^a gilt für die Kraft im Punkt P des Gravitationsfeldes

$$\vec{F}(P) = -G \frac{m \cdot M}{r^2} \cdot \vec{e}_r = -G \frac{m \cdot M}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = -G \frac{m \cdot M}{r^3} \vec{r}$$

wobei \vec{r} der radiale Abstand von m zu M ist. Hierbei handelt es sich um ein *radialsymmetrisches* Feld.

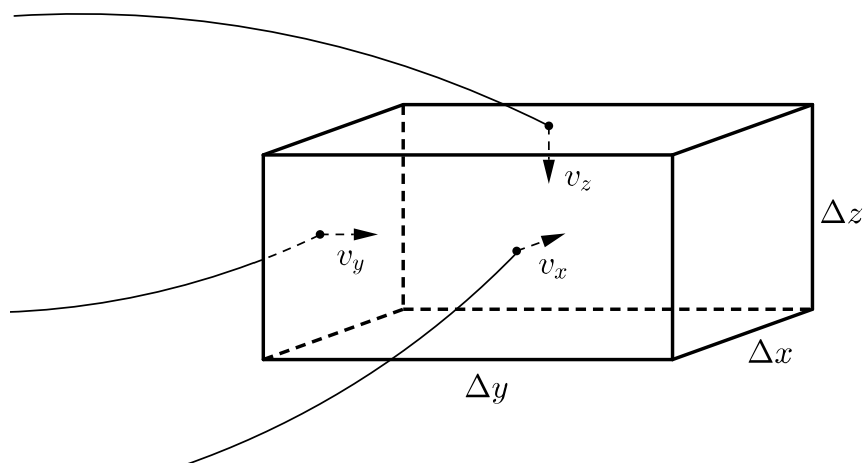
^a*Sir Isaac Newton*(1643-1727)

3.4.1 Divergenz

Wir betrachten eine strömende Flüssigkeit, die wir durch ein räumliches Vektorfeld darstellen können. Das Geschwindigkeitsfeld der Flüssigkeit stellen wir in die drei Raumkomponenten zerlegt dar.

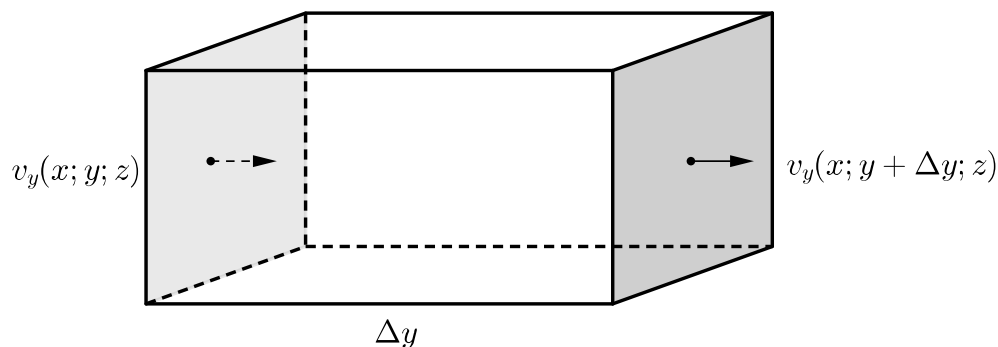
$$\vec{V}(x; y; z) = v_x \cdot \vec{e}_x + v_y \cdot \vec{e}_y + v_z \cdot \vec{e}_z$$

Im Folgenden untersuchen wir den Fluss durch einen kleinen quaderförmigen Bereich des Raums.



Wir betrachten jetzt nur eine der drei Komponenten, alle Überlegungen übertragen sich dann analog auf die anderen.

Für die Komponente $v_y(x; y; z)$ haben wir die folgende Situation für die zugehörige Eintritts- und Austrittsfläche.



Wählen wir die Abmessungen des Quaders sehr klein, so ist $v_y(x; y; z)$ auf der Eintrittsfläche nahezu konstant. Gleiches gilt für $v_y(x; y + \Delta y; z)$ auf der Austrittsfläche.

Wir versuchen jetzt das Volumen jener Flüssigkeitsmenge zu bestimmen, die in der Zeit Δt durch die Flächen des Quaders ein- bzw. austritt. Im Zeitraum Δt legt ein Teilchen den Weg $\Delta s = v_y(x; y; z) \cdot \Delta t$ zurück. Das durch die Eintrittsfläche strömende Volumen beträgt somit

$$V_y = v_y(x; y; z) \cdot \Delta t \cdot \Delta x \cdot \Delta z$$

Für den Abfluss durch Austrittsfläche gilt die analoge Überlegung. Die Differenz zwischen Ab- und Zufluss⁴ beträgt

$$D_y = v_y(x; y + \Delta y; z) \cdot \Delta t \cdot \Delta x \cdot \Delta z - v_y(x; y; z) \cdot \Delta t \cdot \Delta x \cdot \Delta z$$

Für die Zeiteinheit $\Delta t = 1$ ergibt sich eine Differenz von

$$D_y = [v_y(x; y + \Delta y; z) - v_y(x; y; z)] \cdot \Delta x \cdot \Delta z$$

Erweitern wir die Darstellung von D_y mit Δy

$$D_y = \frac{[v_y(x; y + \Delta y; z) - v_y(x; y; z)] \cdot \Delta x \cdot \Delta z \cdot \Delta y}{\Delta y}$$

und verwenden $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$

$$D_y = \frac{[v_y(x; y + \Delta y; z) - v_y(x; y; z)]}{\Delta y} \cdot \Delta V$$

so erhalten wir nach Division durch ΔV die Volumensänderung pro Zeiteinheit pro Volumeneinheit:

$$\frac{D_y}{\Delta V} = \frac{[v_y(x; y + \Delta y; z) - v_y(x; y; z)]}{\Delta y}$$

Lassen wir in diesem Ausdruck noch Δy gegen 0 streben, so gilt

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{[v_y(x; y + \Delta y; z) - v_y(x; y; z)]}{\Delta y} = \frac{\partial v_y}{\partial y}$$

Die Gleiche Argumentation führt zu den Ausdrücken

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[v_x(x + \Delta x; y; z) - v_x(x; y; z)]}{\Delta x} = \frac{\partial v_x}{\partial x}$$

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{[v_z(x; y; z + \Delta z) - v_z(x; y; z)]}{\Delta z} = \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

für die Differenzen der Flüssigkeitsvolumina in die anderen Richtungen.

Definition 3.4.3. Die Gesamtdifferenz an Volumen pro Zeit- und Volumeneinheit wird als *Divergenz* bezeichnet und ist definiert als

$$\operatorname{div}(\vec{V}) := \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Bemerkung 3.4.4. Es gelten die folgenden Interpretationen:

$\operatorname{div}(\vec{V}) > 0$: Abfließender Teil überwiegt, in dV befindet sich eine Quelle.

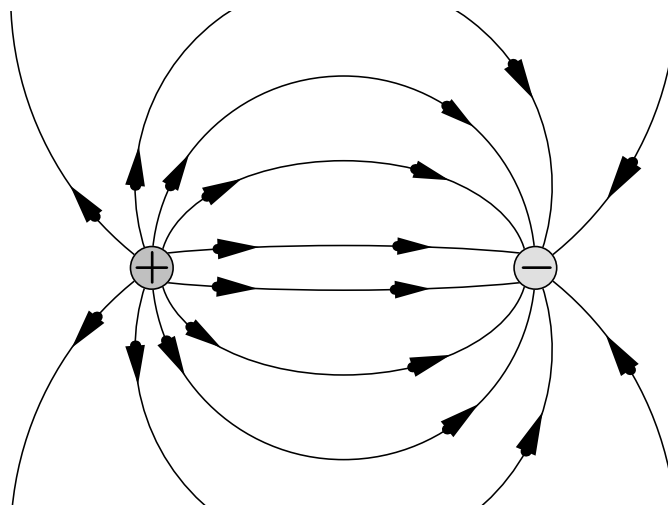
$\operatorname{div}(\vec{V}) < 0$: Zufließender Teil überwiegt, in dV befindet sich eine Senke (negative Quelle).

$\operatorname{div}(\vec{V}) = 0$: Das Strömungsfeld ist in dV quellenfrei.

Die Divergenz wird manchmal auch als Quellstärke oder Quelldichte bezeichnet.

⁴Immer noch wird nur die y -Richtung berücksichtigt.

Beispiel 3.4.5. Das elektrische Feld zweier Ladungen dient gut zur Veranschaulichung von Quellen und Senken.



Die Divergenz kann auch mit Hilfe des Nabla-Operators $\vec{\nabla}$ dargestellt werden.

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}$$

Die Divergenz des Feldes \vec{F} entspricht dem **Skalarprodukt** von \vec{F} und $\vec{\nabla}$.

Beispiel 3.4.6. Wir bestimmen die Divergenz des Feldes $\vec{F} = \begin{pmatrix} x^2 z \\ -4y^2 z^2 \\ xyz^2 \end{pmatrix}$ im Punkt $P(1; 2; 1)$.

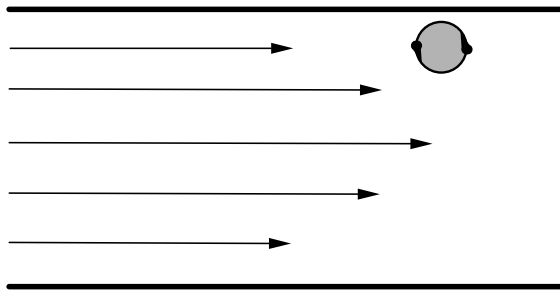
$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{F}) &= 2xz - 8yz^2 + 2xyz \\ \operatorname{div}(\vec{F})|_P &= 2 - 16 + 4 = -10 \end{aligned}$$

In P befindet sich somit eine Senke.

3.4.2 Rotation

Eine strömende Flüssigkeit hat die Eigenschaft, dass sie am Rand langsamer fließt als in der Mitte⁵. Dies ist auf die höhere Reibung am Ufer zurückzuführen und kann durch eingebrachte schwimmende Kugeln veranschaulicht werden. Die Kugeln zeigen noch einen weiteren Effekt, sie beginnen sich zu drehen. Die Beschreibung der auftretenden Rotation ist Inhalt dieses Abschnitts.

⁵Wenn die Gewässertiefe vernachlässigbar ist.



Die Beschreibung dieser Wirbel geschieht mit Vektoren, die in Richtung der Drehachse zeigen. Die Länge der Vektoren ist ein Maß für die Wirbelstärke.

Definition 3.4.7. Unter der *Rotation* eines Vektorfeldes $\vec{F}(x; y; z)$ verstehen wir den Vektor

$$\operatorname{rot}(\vec{F}(x; y; z)) := \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Bemerkung 3.4.8.

- Für $\operatorname{rot}(\vec{F}) = \vec{0}$ heißt \vec{F} wirbelfrei.
- Der Vektor $\operatorname{rot}(\vec{F})|_P$ heißt Wirbeldichte im Punkt P .
- Es gilt die alternative Darstellungsform (Determinantenform)

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Beispiel 3.4.9. Wir berechnen die Rotation des Vektorfeldes $\vec{F} = \begin{pmatrix} xz^4 \\ -4xz \\ 2yz^2 \end{pmatrix}$ im Punkt $P(1; -1; 1)$.

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\vec{F}) &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz^4 & -4xz & 2yz^2 \end{vmatrix} = +\vec{e}_x \cdot (2z^2 + 4x) - \vec{e}_y \cdot (0 - 4xz^3) + \vec{e}_z \cdot (-4z - 0) \\ &= \vec{e}_x(2z^2 + 4x) + \vec{e}_y(4xz^3) - \vec{e}_z(4z) \\ &= \begin{pmatrix} 2z^2 + 4x \\ 4xz^3 \\ -4z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Einsetzen des Punktes P

$$\operatorname{rot}(\vec{F})_P = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

3.4.3 Spezielle Vektorfelder

Wir betrachten in diesem Abschnitt einige besondere Arten von Vektorfeldern, denen in Anwendungen besondere Bedeutung zukommt.

Definition 3.4.10. Seien \vec{E} und \vec{F} zwei Vektorfelder, wobei gilt

$$\vec{F} = \operatorname{rot}(\vec{E})$$

In diesem Fall heißt \vec{F} ein *Wirbelfeld*.

Satz 3.4.11. Wirbelfelder sind stets quellenfrei, d.h. für $\vec{F} = \operatorname{rot}(\vec{E})$ gilt:

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \operatorname{div}(\operatorname{rot}(\vec{E})) = 0$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\vec{E}) &= \underbrace{\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)}_{=:A} \cdot \vec{e}_x + \underbrace{\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)}_{=:B} \cdot \vec{e}_y + \underbrace{\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)}_{=:C} \cdot \vec{e}_z \\ \operatorname{div}(\operatorname{rot}(\vec{E})) &= \frac{\partial}{\partial x}(A) + \frac{\partial}{\partial y}(B) + \frac{\partial}{\partial z}(C) \\ &= \frac{\partial^2 E_z}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 E_y}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 E_x}{\partial y \partial z} \\ &= \frac{\partial^2 E_z}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 E_y}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 E_x}{\partial y \partial z} = 0 \end{aligned}$$

□

Hier wurde im letzten Schritt der *Satz von Schwarz* (1.2.3) verwendet.

Interessanterweise gilt auch die Umkehrung von Satz 3.4.11, also

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = 0 \implies \vec{F} = \operatorname{rot}(\vec{E})$$

In diesem Fall wird \vec{E} ein *Vektorpotential* genannt.

Definition 3.4.12. Sei $\phi(x; y; z)$ ein differenzierbares Skalarfeld. Das Vektorfeld

$$\vec{F} := \operatorname{grad}(\phi)$$

wird *Gradientenfeld* genannt.

Satz 3.4.13. Gradientenfelder sind stets wirbelfrei, d.h. für $\vec{F} = \text{grad}(\phi)$ gilt:

$$\text{rot}(\vec{F}) = \text{rot}(\text{grad}(\phi)) = \vec{0}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \text{rot}(\text{grad}(\phi)) &= \text{rot}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{e}_z\right) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial\phi}{\partial x} & \frac{\partial\phi}{\partial y} & \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{vmatrix} \\ &= + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z}\right) \cdot \vec{e}_x - \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z}\right) \cdot \vec{e}_y + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}\right) \cdot \vec{e}_z \\ &= 0 \cdot \vec{e}_x - 0 \cdot \vec{e}_y + 0 \cdot \vec{e}_z = \vec{0} \end{aligned}$$

□

Auch hier gilt wiederum die Umkehrung des Satzes, also

$$\text{rot}(\vec{F}) = \vec{0} \implies \vec{F} = \text{grad}(\phi)$$

In diesem Fall heißt ϕ ein *Skalarpotential* oder kurz *Potential*.

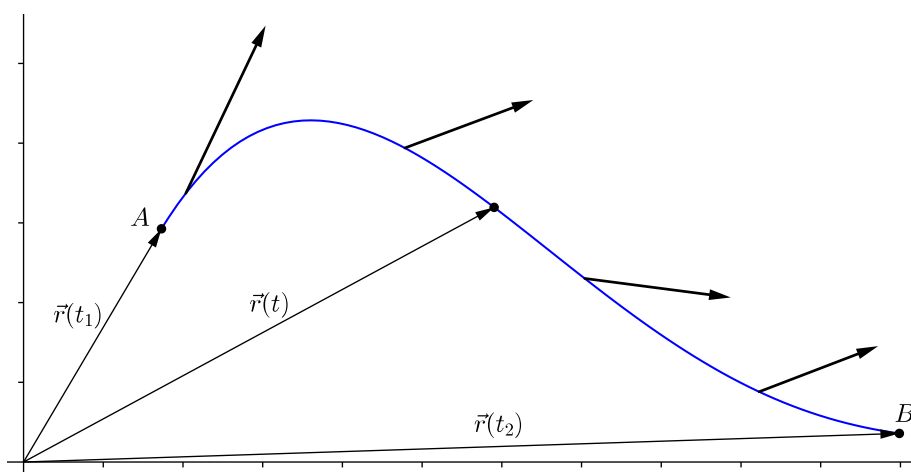
3.4.4 Linien- und Kurvenintegrale (zweiter Art)

Dieser letzte Abschnitt widmet sich der Integration von Vektorfeldern. Zuerst müssen wir klären, was wir überhaupt unter dem Integral von Vektorfelder verstehen. Dazu soll als einführendes Beispiel die physikalische *Arbeit im Kraftfeld* berechnet werden.

Die physikalische Arbeit definieren wir als Skalarprodukt der Kraft \vec{F} mit dem Weg $\Delta\vec{x}$.

$$W := \vec{F} \cdot \Delta\vec{x}$$

In einem ebenen Kraftfeld verschieben wir einen Massepunkt entlang eines Weges von A nach B .



Die Kurve c sei durch die Parametrisierung $\vec{r}(t), t \in [t_1; t_2]$ gegeben. Für ein kleines Wegstück $d\vec{r}$ erhalten wir

$$dW = \vec{F}(x; y) \cdot d\vec{r} = \begin{pmatrix} F_x(x; y) \\ F_y(x; y) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = F_x(x; y) \cdot dx + F_y(x; y) \cdot dy$$

Die gesamte Arbeit erhalten wir jetzt durch unendliche Summation über alle dW , also

$$W = \int_c dW = \int_c \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \underbrace{\dot{\vec{r}} dt}_{\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}}$$

Beispiel 3.4.14. Wir berechnen die Arbeit die das Feld $\vec{F}(x; y) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ xy \end{pmatrix}$ an einer Punktmasse verrichtet, wenn die Verschiebung von $(0; 0)$ nach $(1; 1)$ geradlinig stattfindet.

Eine Parametrisierung der Strecke ist gegeben durch

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}, t \in [0; 1]$$

$$\dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Arbeit ermitteln wir über das Integral

$$W = \int_0^1 \begin{pmatrix} xy^2 \\ xy \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 (xy^2 + xy) dt = \int_0^1 (t^3 + t^2) dt = \left[\frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$$

Beispiel 3.4.15. Wir verwenden das gleiche Kraftfeld wie zuvor, verschieben aber entlang der Kurve $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}, t \in [0; 1]$.

$$W = \int_0^1 \begin{pmatrix} xy^2 \\ xy \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} dt = \int_0^1 (xy^2 + xy \cdot 2t) dt = \int_0^1 (t^5 + 2t^4) dt = \left[\frac{t^6}{6} + \frac{2t^5}{5} \right]_0^1 = \frac{17}{30}$$

Wir sehen anhand der beiden Beispiele, dass die verrichtete Arbeit nicht unabhängig vom Weg ist. Allgemein legen diese Berechnungen nahe, das Linienintegral wie folgt zu definieren.

Definition 3.4.16. Sei \vec{F} ein Vektorfeld und \vec{r} der Ortsvektor einer Kurve c mit Tangentialvektor $\dot{\vec{r}}$. Wir bezeichnen

$$\int_c \vec{F} \cdot d\vec{r} := \int_{t_1}^{t_2} (\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}) dt$$

als das *Kurven- oder Linienintegral zweiter Art* von \vec{F} längs der Kurve c .

Bemerkung 3.4.17.

- Es gilt

$$\int_{-c} \vec{F} d\vec{r} = - \int_c \vec{F} d\vec{r}$$

- Für einen geschlossenen Weg, d.h. $\vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_2)$ wird oft das Symbol

$$\oint_c \vec{F} d\vec{r}$$

verwendet.

- In der Literatur wird das Integral $\int_c \vec{F} \cdot \vec{r}$ auch manchmal ausmultipliziert angegeben.

Z.B würde für den Ausdruck

$$\int_c \begin{pmatrix} xy \\ -x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

die Notation

$$\int_c (xy \cdot dx - x \cdot dy)$$

verwendet werden.

Definition 3.4.18. Ein Vektorfeld heißt **konservativ** oder **Potentialfeld**, wenn das Wegintegral $\int_c \vec{F} d\vec{r}$ wegunabhängig ist. Das bedeutet, der Wert des Integrals hängt nur vom Anfangs- und Endpunkt des Weges ab.

Satz 3.4.19. Ein konservatives Vektorfeld hat einige wichtige Eigenschaften die wir hier zusammenstellen. Alle nachfolgenden Eigenschaften sind äquivalent und gelten in einfach zusammenhängenden Gebieten.⁶

- Das Integral

$$\int_c \vec{F} d\vec{r}$$

ist wegunabhängig.

- Das Integral längs einer geschlossenen Kurve verschwindet:

$$\oint_c \vec{F} d\vec{r} = 0$$

- \vec{F} ist als Gradient einer Potentialfunktion ϕ darstellbar:

$$\vec{F} = \text{grad}(\phi)$$

- Das Vektorfeld \vec{F} ist wirbelfrei:

$$\text{rot}(\vec{F}) = \vec{0}$$

- Das Skalarprodukt von \vec{F} und $d\vec{r}$ ist das Totale Differenzial einer Potentialfunktion:

$$d\phi = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

⁶Das bedeutet anschaulich, dass die Menge in der die Integrationskurve c liegt, keine "Löcher" enthält.

Satz 3.4.20. Die Eigenschaft $\operatorname{rot}(\vec{F}) = \vec{0}$ lässt sich in die folgenden Gleichungen überführen:

- Ebenes Feld:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

- Räumliches Feld:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z}$$

Beweis:

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hieraus folgen direkt die angegebenen Gleichungen. □

Beispiel 3.4.21. Gegeben sei $\vec{F} = \begin{pmatrix} 3x^2y \\ x^3 \end{pmatrix}$ auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet. Wir bearbeiten der Reihe nach die folgenden Aufgabenstellungen:

1. Zeige \vec{F} ist konservativ.
2. Bestimme die zugehörige Potentialfunktion ϕ .
3. Berechne allgemein $\int_{P_1}^{P_2} \vec{F} d\vec{r}$.

ad 1)

Wir rechnen das Kriterium von Satz 3.4.20 nach:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = 3x^2 = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

✓

ad 2)

Nach Punkt 1) gilt $\vec{F} = \operatorname{grad}(\phi)$ und daher

$$\vec{F}_x = 3x^2y = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad \text{und} \quad \vec{F}_y = x^3 = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

Wir integrieren und erhalten

$$\begin{aligned} \phi &= \int 3x^2y dx = x^3y + K(y) \quad (K(y) \text{ eine Konstante, die evtl. von } y \text{ abhängt}) \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= x^3 = x^3 + K'(y) \implies K'(y) = 0 \implies K(y) = \text{const} \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir

$$\phi(x; y) = x^3y + K_0$$

✓

ad 3)

$$\begin{aligned}\int_{\tilde{P}_1}^{P_2} \vec{F} d\vec{r} &= \int_{\tilde{P}_1}^{P_2} \begin{pmatrix} 3x^2y \\ x^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \int_{\tilde{P}_1}^{P_2} \underbrace{(3x^2y dx + x^3 dy)}_{=d\phi} \\ &= \int_{\tilde{P}_1}^{P_2} d\phi = [\phi(x; y)]_{(x_1; y_1)}^{(x_2; y_2)} = [x^3y + K_0]_{(x_1; y_1)}^{(x_2; y_2)} = \\ &= (x_2^3y_2 + K_0) - (x_1^3y_1 + K_0) = \mathbf{x_2^3y_2 - x_1^3y_1}\end{aligned}$$

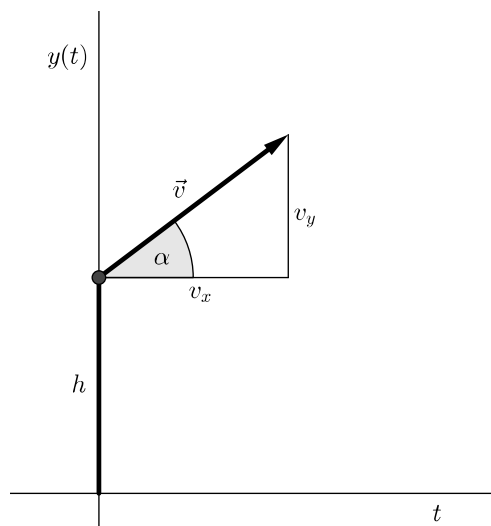
✓

4 Gewöhnliche Differenzialgleichungen

4.1 Einleitung

Differenzialgleichungen sind DIE Säule, auf der die modernen Naturwissenschaften ruhen. Dieses Gebiet ist ebenso wichtig wie umfangreich, wir werden daher nur die elementaren Typen und Methoden kennenlernen. Das von uns angestrebte Niveau soll so hoch sein, dass bei neu auftretenden Differenzialgleichungen zumindest der Typ bestimmt und somit ein adäquates Lösungsverfahren in der Literatur recherchiert werden kann. Wir beginnen mit einem einfachen Beispiel.

Beispiel 4.1.1. Von der Höhe h soll ein Objekt im Winkel α mit Geschwindigkeit \vec{v} abgeschossen werden.



Wir suchen nach jener Funktion $y(t)$, die jedem Zeitpunkt t die *Flughöhe* des Objekts zuordnet. Unter Vernachlässigung von Reibungskräften wirkt nur die Gravitationskraft. Die einzig auftretende *Beschleunigung* ist somit

$$y''(t) = -g$$

Das negative Vorzeichen lässt die Schwerkraft nach unten wirken, also in negative y -Richtung. Hier haben wir bereits ein Beispiel für eine Differenzialgleichung, genauer eine lineare Differenzialgleichung zweiter Ordnung. Die exakte Begriffsbildung wird nach diesem Beispiel besprochen. Durch Integration erhalten wir

$$y'(t) = -gt + v_0 \quad (v_0 \text{ konstant})$$

Die (Integrations)Konstante haben wir treffend mit v_0 bezeichnet, denn sie ist physikalisch interpretiert nichts anderes als die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$.

Eine Weitere Integration führt zur allgemeinen Lösung

$$y(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_0t + h_0 \quad (h_0 \text{ konstant})$$

Eine neue Integrationskonstante h_0 kommt hinzu, die der Starthöhe h zum Zeitpunkt $t = 0$ entspricht.

Um die Lösung zu vervollständigen benötigen wir noch Informationen zu v_0 , die wir aus der Skizze ablesen. Die Anfangsgeschwindigkeit v_0 entspricht dem senkrechten Anteil von \vec{v} , also $|\vec{v}| \cdot \sin(\alpha)$. Insgesamt lässt sich die Flughöhe $y(t)$ durch die Gleichung

$$y(t) = -\frac{gt^2}{2} + \underbrace{|\vec{v}| \cdot \sin(\alpha)}_{=const} t + h$$

beschreiben.

Definition 4.1.2. Gleichungen, die Ableitungen bis zu n -ter Ordnung einer Funktion $y = y(x)$ enthalten, heißen *Differenzialgleichungen* kurz (DGL) n -ter Ordnung.

Beispiel 4.1.3.

- Explizite Darstellung, 1. Ordnung:

$$y' = 2x$$

- Implizite Darstellung, 1. Ordnung:

$$x + y \cdot y' = 0$$

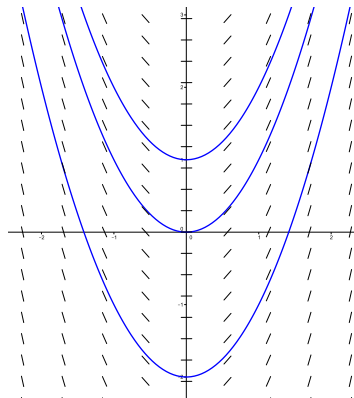
- Implizite Darstellung, 3. Ordnung:

$$y''' + 2y' = \cos(x)$$

Lösungen von Differenzialgleichungen sind im Allgemeinen *Funktionenscharen*, die von Parametern abhängen. Schon in unserem Einführungsbeispiel haben wir die beiden Parameter v_0 und h_0 in unserer Lösung erhalten. Erst durch konkrete weitere Informationen kann eine spezielle Lösung gefunden werden.

Beispiel 4.1.4. Die DGL $y'(x) = 2x$ hat alle Funktionen der Form $y(x) = x^2 + c$ als Lösungen, wobei hier c der Parameter ist.

Die Abbildung zeigt einige Lösungen der DGL, die in das *Richtungsfeld* eingezeichnet wurden.



4.2 Anfangswertprobleme (AWP)

Ein Anfangswertproblem haben wir dann vorliegen, wenn zu einer gegebenen DGL n -ter Ordnung, die Werte der Ausdrücke $y(x_0), y'(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0)$ angegeben sind.

Beispiel 4.2.1. Gegeben sei die DGL $y'(x) = 2x$ und die Anfangsbedingung $y(0) = 1$.

Wir bestimmen zuerst die allgemeine Lösung durch einfache Integration

$$\int 2x dx = x^2 + c$$

und verwenden jetzt $y(0) = 1$, um die spezielle (partikuläre) Lösung unseres Anfangswertproblems zu finden.

$$y(0) = 1 = 0^2 + c \implies c = 1$$

$$\mathbf{y(x) = x^2 + 1}$$

Beispiel 4.2.2. Die *Schwingungsgleichung*

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

besitzt die Funktion $x(t) = A \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi)$ mit $\varphi \in [0; 2\pi)$ als allgemeine Lösung. Dies zeigen wir durch simple Differenziation:

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\dot{x}(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi) \cdot \omega_0$$

$$\ddot{x}(t) = -A \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi) \cdot \omega_0^2$$

Wir setzen in die Schwingungsgleichung ein und erhalten

$$\underbrace{-A \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi) \cdot \omega_0^2}_{=\ddot{x}} + \omega_0^2 \cdot \underbrace{(A \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi))}_{=x} = 0$$

Geben wir uns jetzt noch zwei Bedingungen vor, z.B. soll die Auslenkung der Schwingung zu Beginn $t = 0$ die Größe x_0 (in positive Richtung) betragen und am Anfang in Ruhelage sein ($v_0 = \dot{x}(0) = 0$).

Die beiden Parameter A und φ lassen sich aus diesen Informationen bestimmen.

$$x(0) = x_0 \implies A \sin(\varphi) = x_0$$

$$\dot{x}(t) = \omega_0 A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\dot{x}(0) = 0 \implies \omega_0 A \cdot \cos(\varphi) = 0 \implies \cos(\varphi) = 0 \implies \varphi_1 = \frac{\pi}{2}; \varphi_2 = \frac{3\pi}{2}$$

Interpretieren wir A als Amplitude und x_0 als Anfangsauslenkung, so gilt sicher $A, x_0 > 0$ und somit folgt $\sin(\varphi) > 0$. Der gesuchte Phasenwinkel liegt daher in $(0; \pi)$, es kommt somit nur die Lösung $\varphi = \frac{\pi}{2}$ in Frage.

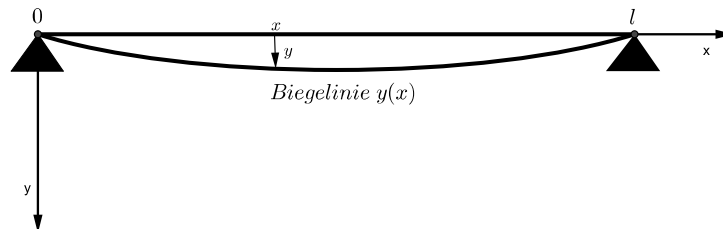
Einsetzen in $A \sin(\varphi) = x_0$ ergibt $A = x_0$ und wir erhalten als Weg-Zeit-Funktion unter den genannten Anfangsbedingungen

$$x(t) = x_0 \cdot \sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) = x_0 \cdot \cos(\omega_0 t) \quad (t \geq 0)$$

4.3 Randwertprobleme (RWP)

Im Unterschied zu Anfangswertproblemen werden bei einem Randwertproblem einer DGL n -ter Ordnung, die Funktionswerte $y(x_1), y(x_2), \dots, y(x_n)$ an n verschiedenen Stellen vorgegeben.

Beispiel 4.3.1. Wir betrachten ein klassisches Problem aus der Mechanik. Ein Balken wird an zwei Endpunkten fixiert und mit einer konstanten Streckenlast gleichmäßig belastet.



Für kleine Auslenkungen kann die Verformung des Balkens durch die DGL 2. Ordnung

$$y'' = -\frac{M_b}{E \cdot I}$$

beschrieben werden. Hier beschreibt E eine Materialkonstante, I das sogenannte Flächenmoment und M_b das Biegemoment, das in diesem Belastungsfall durch die Gleichung

$$M_b = \frac{q}{2}(lx - x^2) \quad (0 \leq x \leq l, q \text{ konstant})$$

gegeben ist.

Da am Rand keine Verformung auftritt erhalten wir insgesamt das Randwertproblem

$$y''(x) = \frac{-q}{2EI}(lx - x^2)$$

$$0 = y(0) = y(l)$$

Auch diese DGL bedarf keiner besonderen Lösungsmethoden, wir können die Lösungsfunktion durch zweifache Integration erhalten.

$$y'(x) = -\frac{q}{2EI} \int (lx - x^2) dx = -\frac{q}{2EI} \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{3} + c_1 \right)$$

$$y(x) = \int y'(x) dx = -\frac{q}{2EI} \left(\frac{lx^3}{6} - \frac{x^4}{12} + c_1 x + c_2 \right)$$

Aus den Randwertbedingungen können wir die erzeugten Konstanten bestimmen:

$$y(0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 0 = -\frac{q}{2EI}(0 - 0 + c_1 \cdot 0 + c_2) = -\frac{q}{2EI} \cdot c_2 \quad \Longrightarrow \quad c_2 = 0$$

$$y(l) = 0 \quad \Longrightarrow \quad -\frac{q}{2EI} \left(\frac{l^4}{6} - \frac{l^4}{12} + c_1 \cdot l + 0 \right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad c_1 = -\frac{l^3}{12}$$

Insgesamt hat die Lösungskurve die Darstellung

$$y(x) = \frac{q}{24EI} (x^4 - 2lx^3 + l^3x)$$

4.4 Differenzialgleichungen erster Ordnung

Wir werden uns jetzt mit speziellen Typen von DGLs beschäftigen und einige Lösungsverfahren kennenlernen. Es existiert kein allgemeines Lösungsverfahren für Differenzialgleichungen. Verschiedene Typen von DGLs wurden im Laufe der Zeit studiert und konnten gelöst werden, in voller Allgemeinheit entziehen sich diese Gleichungen aber jeglicher analytischer Lösungsmethode.

4.4.1 Trennung der Variablen

Die erste wichtige Methode heißt *Trennung der Variablen* und wird sogleich an einem Beispiel demonstriert. Sie funktioniert immer dann, wenn die DGL in der Form $y' = f(x) \cdot g(y)$ darstellbar ist.

Beispiel 4.4.1. Wir lösen die DGL $y' = y$.

$$y' = y$$

$$\frac{dy}{dx} = y$$

$$dy = y \cdot dx$$

$$\frac{1}{y} dy = dx \quad (\text{Beidseitige Integration})$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int dx$$

$$\ln |y| + c_0 = x + c_1 \quad (\text{Auflösen nach } y)$$

$$\ln |y| = x + \underbrace{c_1 - c_0}_{=c_2}$$

$$|y| = e^{x+c_2}$$

$$y = \pm e^x \cdot e^{c_2} = \underbrace{\pm e^{c_2}}_{=:K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \cdot e^x$$

$$y = K \cdot e^x$$

Da e^{c_2} nie 0 wird, muss diese Fall noch extra geprüft werden und in der Tat, $y = 0$ erfüllt die Gleichung $y' = y$. Insgesamt erhalten wir als Lösungsmenge:

$$y = \mathbf{K} \cdot e^x \quad , K \in \mathbb{R}$$

Beispiel 4.4.2. Zu lösen ist die DGL $x + yy' = 0$ mit $y(0) = 2$.

$$\begin{aligned}
x + y \cdot \frac{dy}{dx} &= 0 \\
x \cdot dx &= -y \cdot dy \\
\int x dx &= \int y dy \\
\frac{x^2}{2} + c_0 &= -\frac{y^2}{2} + c_1 \\
x^2 + 2c_0 &= -y^2 + 2c_1 \\
y^2 &= -x^2 + c
\end{aligned}$$

Die partikuläre Lösung mit $y(0) = 2$ lautet

$$\begin{aligned}
2^2 &= 0 + c \\
\mathbf{y^2 + x^2} &= \mathbf{4}
\end{aligned}$$

Es handelt sich bei der Lösung um einen Mittelpunktskreis mit Radius 2.

Bemerkung 4.4.3. Das vorangegangene Beispiel wäre auch mit einem Blick auf Beispiel 1.4.8 lösbar gewesen. Dort haben wir die Ableitung $y' = \frac{-x}{y}$ eines Kreises durch implizites Differenzieren erhalten. Diese Formel entspricht genau unserer gegebenen DGL.

Beispiel 4.4.4. Wir lösen die DGL $y' + y^2 = 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} + y^2 &= 0 \\
dy &= -y^2 dx \\
-\frac{1}{y^2} dy &= dx \\
-\int \frac{1}{y^2} dy &= \int dx \\
\frac{1}{y} + c_0 &= x + c_1 \\
\frac{1}{y} &= x + c \\
\frac{1}{x + c} &= y \quad x \neq -c \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Da $y = 0$ ebenfalls Lösung der DGL $y' + y^2 = 0$ ist, haben wir als Lösungsmenge

$$y = \frac{1}{x + c} \quad \text{oder} \quad y = 0$$

Beispiel 4.4.5. Differentialgleichungen die keine weiteren zusätzlichen Bedingungen erfüllen, müssen nicht unbedingt *eindeutig* lösbar sein. Wir lösen dazu die DGL $xy' - 2y = 0$ mit $y(-1) = -1$.

Wir verwenden wieder die Methode der Trennung der Variablen.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{2y}{x} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{2y}{x} \\ \int \frac{1}{2y} dy &= \int \frac{1}{x} dx \\ \frac{1}{2} \ln |y| &= \ln |x| + c_1 \\ \ln |y| &= 2 \ln |x| + c_2 \\ |y| &= e^{2 \ln |x| + c_2} = e^{\ln |x|^2} \cdot e^{c_2} = |x|^2 \cdot c_3 \quad , c \in \mathbb{R}^+ \\ y &= c \cdot x^2 \quad , c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Aus der Anfangsbedingung $y(-1) = -1$ erhalten wir

$$-1 = c \cdot (-1)^2 = c$$

und daraus die Lösung

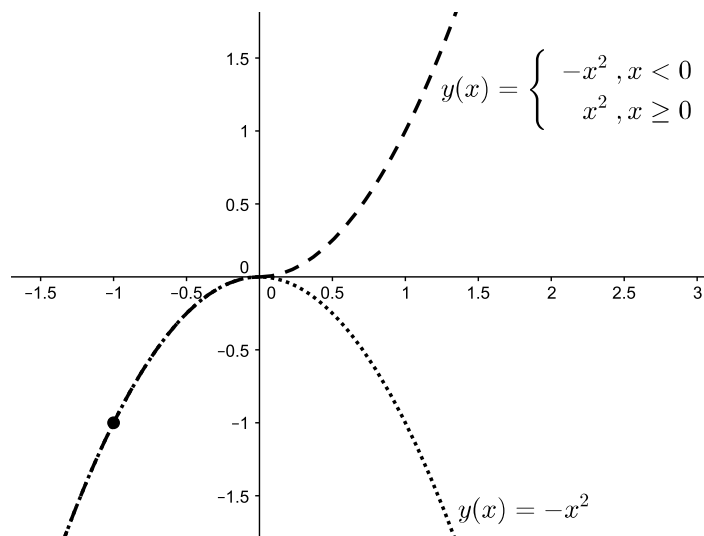
$$y(x) = -x^2$$

Diese Lösung ist aber nicht eindeutig, auch die stetig differenzierbare Funktion

$$y(x) = \begin{cases} -x^2 & , x < 0 \\ x^2 & , x \geq 0 \end{cases}$$

stellt eine Lösung der DGL dar. Wir sehen, unsere Rechenmethode liefert eine Lösung, doch deren Eindeutigkeit ist nicht ohne weitere Forderungen gewährleistet.

Die Abbildung zeigt beide Lösungsfunktionen und gibt auch einen Hinweis auf die Stelle, an der ein mögliches Problem auftritt.



An der Stelle $x = 0$ verzweigen sich die Lösungskurven. Da der Ausdruck $y' = \frac{2y}{x}$ an dieser Stelle gar nicht definiert ist kann es zu solchen Phänomenen kommen.

4.4.2 Substitutionsmethode

Liegt eine DGL 1. Ordnung in der Form

$$y' = f(ax + by + c) \quad \text{oder} \quad y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

vor, so kann durch eine geeignete Substitution eine neue DGL erzeugt werden, deren Variablen separabel sind.

Wir betrachten zwei Beispiele zur Demonstration der Methode.

Beispiel 4.4.6. Sei die DGL $y' = 2x - y$ gegeben. Noch ist keine Separation der Variablen möglich. Durch die Substitution $u = 2x - y$ erhalten wir

$$u' = 2 - y' \quad \implies \quad y' = 2 - u'$$

Setzen wir in unsere ursprüngliche Gleichung ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} 2 - u' &= u \\ 2 - \frac{du}{dx} &= u \\ \frac{du}{u-2} &= -dx \\ \int \frac{1}{u-2} du &= - \int dx \\ \ln |u-2| &= -x + c_0 \\ |u-2| &= e^{-x} \cdot e^{c_0} \\ u-2 &= \pm e^{-x} \cdot e^{c_0} \\ u-2 &= e^{-x} \cdot c_1 && (c_1 \in \mathbb{R}) \\ u &= c_1 e^{-x} + 2 \end{aligned}$$

Durch Rücksubstitution erhalten wir die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} 2x - y &= c_1 e^{-x} + 2 \\ y &= 2x - 2 - c_1 e^{-x} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{c e^{-x} + 2x - 2} \end{aligned}$$

Beispiel 4.4.7. Die DGL $y' = \frac{x+2y}{x}$ kann ebenfalls durch Substitution gelöst werden. Dazu formen wir zuerst um

$$y' = \frac{x+2y}{x} = 1 + 2\frac{y}{x}$$

und substituieren $u = \frac{y}{x}$. Umformen und Ableiten liefert $y' = u'x + u$. Jetzt können wir einsetzen

und die DGL durch Trennung der Variablen lösen.

$$u'x + u = 1 + 2u$$

$$\frac{du}{dx}x = 1 + u$$

$$\frac{1}{1+u}du = \frac{1}{x}dx$$

$$\int \frac{1}{1+u}du = \int \frac{1}{x}dx$$

$$\ln|1+u| = \ln|x| + c_0$$

$$\ln|1+u| - \ln|x| = c_0$$

$$\ln\left|\frac{1+u}{x}\right| = c_0$$

$$\left|\frac{1+u}{x}\right| = e^{c_0}$$

$$\frac{1+u}{x} = \pm e^{c_0} =: c \quad (c \in \mathbb{R})$$

$$1+u = cx$$

Rücksubstitution liefert das Endergebnis

$$\frac{y}{x} = cx - 1$$

$$\mathbf{y = cx^2 - x}$$

4.5 Lineare Differenzialgleichungen erster Ordnung

Die nächsten beiden Lösungsmethoden für DGL 1. Ordnung setzen voraus, dass die Gleichungen *linear* sind. Was darunter zu verstehen ist, klärt die folgende Definition.

Definition 4.5.1. Eine Differenzialgleichung 1. Ordnung heißt *linear*, wenn sie in der Form

$$y' + f(x) \cdot y = g(x)$$

darstellbar ist.

Beispiel 4.5.2.

- Folgende DGL sind *linear*

$$\cdot y' - xy = 0 \quad (\text{homogen})$$

$$\cdot xy' + 2y = e^x \implies y' + \frac{2}{x}y = \frac{e^x}{x} \quad (\text{inhomogen})$$

$$\cdot y' + \tan(x) \cdot y = 2 \cdot \sin(x) \cos(x) \quad (\text{inhomogen})$$

- Beispiele für *nicht-lineare* DGL

$$\cdot y' = 1 - y^2 \quad y \text{ tritt quadratisch auf}$$

$$\cdot yy' + x = 0 \quad \text{Das Produkt } yy' \text{ ist verboten}$$

Eine homogene lineare DGL wird durch das schon bekannte Verfahren der Variablenseparation gelöst. Bei inhomogenen linearen DGL bedarf es dann noch eines weiteren Schritts, der jetzt erklärt werden soll.

4.5.1 Variation der Konstanten

Die erste Methode, die wir zur Lösung inhomogener lineare DGLs kennen lernen, heißt *Variation der Konstanten*. Das folgende Beispiel erläutert die Vorgehensweise.

Beispiel 4.5.3. Gegeben sei die lineare, inhomogene DGL $y' + \frac{y}{x} = \cos(x)$. Die Lösung erfolgt in zwei Schritten, die wir jetzt durchführen wollen.

1. Schritt. Lösen der zugehörigen *homogenen* DGL:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 0$$

$$\frac{1}{y} dy = -\frac{1}{x} dx$$

$$\int \frac{1}{y} dy = -\int \frac{1}{x} dx$$

$$\ln |y| = -\ln |x| + c_0$$

$$\ln |y \cdot x| = c_0$$

$$|y \cdot x| = e^{c_0}$$

$$y_0 = \frac{K}{x} \quad (K \in \mathbb{R})$$

2. Schritt. Variation der Konstanten:

Wir ersetzen die gerade erzeugte Konstante K durch die Funktion $K(x)$ und bilden die erste Ableitung, die wir in die ursprüngliche inhomogene DGL einsetzen. Wir erhalten somit für

$$y = \frac{K(x)}{x}$$

$$y' = \frac{K'(x) \cdot x - 1 \cdot K(x)}{x^2} = \frac{K'(x)}{x} - \frac{K(x)}{x^2}$$

$$y' + \frac{y}{x} = \cos(x)$$

$$\frac{K'(x)}{x} - \frac{K(x)}{x^2} + \frac{K(x)}{x^2} = \cos(x)$$

$$\frac{K'(x)}{x} = \cos(x)$$

$$K'(x) = x \cdot \cos(x)$$

$$K(x) = \int x \cos(x) dx = \cos(x) + x \sin(x) + c$$

Die inhomogene DGL besitzt damit die *allgemeine* Lösung

$$\mathbf{y} = \frac{\mathbf{K}(\mathbf{x})}{\mathbf{x}} = \frac{\cos(\mathbf{x}) + \mathbf{x} \sin(\mathbf{x}) + \mathbf{c}}{\mathbf{x}} \quad (c \in \mathbb{R})$$

4.5.2 Methode der partikulären Lösung

Diese Methode beruht auf dem folgenden wichtigen Satz über lineare Differenzialgleichungen.

Satz 4.5.4. Die allgemeine Lösung $y = y(x)$ einer inhomogenen linearen DGL vom Typ

$$y' + f(x) \cdot y = g(x)$$

ist als Summe der allgemeinen Lösung $y_0 = y_0(x)$ der zugehörigen homogenen linearen DGL und einer beliebigen *partikulären* Lösung $y_p = y_p(x)$ der inhomogenen linearen DGL darstellbar:

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x)$$

Dieses Superpositionsprinzip gilt auch für lineare DGLs höherer Ordnung.

Beispiel 4.5.5. Wir lösen die Gleichung $y' - \underbrace{\tan(x)}_{=f(x)} \cdot y = \underbrace{2 \sin(x)}_{=g(x)}$.

1. Schritt.

$$y' - \tan(x) \cdot y = 0$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \tan(x) dx$$

$$\ln |y| = -\ln |\cos(x)| + c_0$$

$$\ln |y \cdot \cos(x)| = c_0$$

$$y \cdot \cos(x) = c_1 \quad (c_1 \in \mathbb{R})$$

$$y = \frac{c_1}{\cos(x)}$$

2. Schritt. Wir wählen den Lösungsansatz^a $y_p = A \cdot \cos(x)$.

$$\begin{aligned}y_p' &= -A \cdot \sin(x) \\-A \sin(x) - \frac{\sin(x)}{\cos(x)} A \cos(x) &= 2 \sin(x) \\-2A \sin(x) &= 2 \sin(x) \\A &= -1 \\ \implies y_p &= -\cos(x)\end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung ergibt sich aus der Addition der homogenen- und partikulären Lösung.

$$\begin{aligned}y &= y_0 + y_p \\ \mathbf{y} &= \frac{\mathbf{C} - \cos(\mathbf{x})^2}{\cos(\mathbf{x})} \quad (C \in \mathbb{R})\end{aligned}$$

^aDas Auffinden des passenden Ansatzes ist oftmals recht schwierig.

4.6 Lineare Differenzialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Der letzte Abschnitt wird den Differenzialgleichungen zweiter Ordnung gewidmet, wobei wir diesmal nur konstante Koeffizienten zulassen.

Definition 4.6.1. Eine Differenzialgleichung vom Typ

$$y'' + ay' + by = g(x) \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

heißt lineare Differenzialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Wir werden nur die einfachsten Beispiele betrachten und verweisen hiermit ausdrücklich auf die reichhaltige Fachliteratur zu diesem Thema. Anhand einiger ausgewählter Beispiele sollen die wichtigsten Begriffe entwickelt werden.

4.6.1 Homogene DGL

Eine *homogene* DGL 2. Ordnung liegt genau dann vor, wenn $g(x) = 0$ gilt. Mit etwas Fantasie kann man eine gewisse Ähnlichkeit zwischen

$$y'' + ay' + by = 0$$

und einer normalen Ebenengleichung $ax + by + cz = 0$ im \mathbb{R}^3 erkennen. Wir wissen, dass die Vektoren $(x; y; z)^T$ einer solchen Ursprungsebene einen Vektorraum bilden. Genauso verhält es sich mit den Lösungen einer homogenen DGL 2. Ordnung, auch sie bilden einen Vektorraum.

Satz 4.6.2. Für eine DGL der Form $y'' + ay' + by = 0$ gelten die folgenden Eigenschaften:

a) Ist $y_1(x)$ eine Lösung der Differenzialgleichung, so sind auch alle Funktionen des Typs

$$y(x) = \lambda \cdot y_1(x) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

Lösungen der DGL.

b) Sind $y_1(x)$ und $y_2(x)$ Lösungen der DGL, so auch die aus ihnen gebildete Linearkombination

$$y(x) = \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) \quad (\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R})$$

c) Ist $y(x) = u(x) + i \cdot v(x)$ eine komplexwertige Lösung der DGL, so sind auch Real- und Imaginärteil ($u(x)$ bzw. $v(x)$) Lösungen der Differenzialgleichung.

Beweis: Gute Übungsaufgabe!

Der Vektorraum der Lösungen einer DGL der Form $y'' + ay' + by = 0$ ist (in Analogie zur Ebene im \mathbb{R}^3) zweidimensional. Wir können *alle* Lösungen der Differenzialgleichung angeben, wenn wir zwei beliebige linear unabhängige Lösungen bestimmt haben. Diese beiden Lösungen dienen als Basis des Lösungsraums.

Bemerkung 4.6.3. Für Differenzialgleichungen höherer Ordnung ist der Nachweis der linearen Unabhängigkeit oftmals rechenintensiv. In diesen Fällen kann die sogenannte Wronski-Determinante¹ verwendet werden, um auf die lineare Unabhängigkeit zu schließen. Wir werden sie im weiteren Verlauf jedoch nicht verwenden.

¹József Maria Hoëné-Wronski (1776-1853)

Beispiel 4.6.4. Wir lösen die DGL $y'' + 2y' - 8y = 0$. Dazu beginnen wir (wie immer bei diesem Typ DGL) mit dem Ansatz $y = e^{\lambda x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}y &= e^{\lambda x} \\y' &= \lambda e^{\lambda x} \\y'' &= \lambda^2 e^{\lambda x}\end{aligned}$$

Einsetzen in die ursprüngliche DGL

$$\begin{aligned}\lambda^2 e^{\lambda x} + 2\lambda e^{\lambda x} - 8e^{\lambda x} &= 0 \\ \lambda^2 + 2\lambda - 8 &= 0 \quad (\text{charakteristisches Polynom}) \\ \lambda_{1,2} &= -1 \pm \sqrt{1+8} = -1 \pm 3\end{aligned}$$

Das charakteristische Polynom hat zwei reelle Lösungen, damit erhalten wir

$$y_1 = e^{2x} \quad \text{und} \quad y_2 = e^{-4x}$$

Diese beiden Lösungen sind linear unabhängig, da e^{-4x} nicht durch skalare Multiplikation aus e^{2x} gewonnen werden kann.

Die allgemeine Lösung dieser Differenzialgleichung lautet

$$\mathbf{y} = \mathbf{c}_1 \cdot e^{2x} + \mathbf{c}_2 \cdot e^{-4x} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

Beispiel 4.6.5. Wir lösen die DGL $y'' - 8y' + 16y = 0$.

$$\begin{aligned}\lambda^2 - 8\lambda + 16 &= 0 \\ \lambda_{1,2} &= 4 \pm 0\end{aligned}$$

Da die Diskriminante gleich Null ist, erhalten wir vorerst nur eine Lösung $y_1 = e^{4x}$. Der Ansatz $y = C(x) \cdot e^{\lambda_{1,2} \cdot x}$ mit anschließender Variation der Konstanten (und einiges an Rechenarbeit) liefert das Ergebnis

$$y_1 = e^{4x} \quad \text{und} \quad y_2 = x \cdot e^{4x}$$

Die allgemeine Lösung lautet somit

$$\mathbf{y} = \mathbf{c}_1 \cdot e^{4x} + \mathbf{c}_2 \cdot x e^{4x} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

Beispiel 4.6.6. Der letzte mögliche Fall soll anhand der DGL $y'' + 4y' + 13y = 0$ gezeigt werden.

$$\begin{aligned}\lambda^2 + 4\lambda + 13 &= 0 \\ \lambda_{1,2} &= -2 \pm \sqrt{-9} = -2 \pm 3i\end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der DGL entspricht wieder der Linearkombination der beiden Einzellösungen.

$$\begin{aligned}y &= c_1 e^{(-2+3i)x} + c_2 e^{(-2-3i)x} && (c_1, c_2 \in \mathbb{R}) \\ y &= e^{-2x} (c_1 e^{3ix} + c_2 e^{-3ix}) \\ y &= e^{-2x} (c_1 (\cos(3x) + i \sin(3x)) + c_2 (\cos(-3x) + i \sin(-3x)))\end{aligned}$$

Nach Satz 4.6.2 c) sind bei einer komplexen Lösung auch Real- und Imaginärteil Lösung der Differenzialgleichung. Aus der gerade erhaltenen Gleichung ergibt sich

$$y_{\text{Real}} = e^{-2x} (c_1 \cos(3x) + c_2 \cos(-3x)) = e^{-2x} (c_1 \cos(3x) + c_2 \cos(3x)) = e^{-2x} (k_1 \cos(3x))$$

$$y_{\text{Img}} = e^{-2x} (c_1 \sin(3x) + c_2 \sin(-3x)) = e^{-2x} (c_1 \sin(3x) - c_2 \sin(3x)) = e^{-2x} (k_2 \sin(3x))$$

Die allgemeine Lösung lautet

$$\mathbf{y} = \mathbf{k}_1 \cdot e^{-2\mathbf{x}} \cos(\mathbf{3x}) + \mathbf{k}_2 \cdot e^{-2\mathbf{x}} \sin(\mathbf{3x}) \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

4.6.2 Inhomogene DGL

Die Lösung des *inhomogenen* Falls beruht im Wesentlichen auf dem schon vorgestellten Verfahren des Auffindens einer partikulären Lösung. Die Kunst ist wiederum, die passende Ansatzfunktion zu finden. Sinnvollerweise wird hier ein Tabellenwerk zu Rate gezogen, das Rad muss nicht jedes Mal neu erfunden werden.

Beispiel 4.6.7. Gegeben sei die inhomogene lineare DGL 2. Ordnung $y'' + 10y' - 24y = 12x^2 + 14x + 1$.

$$y'' + 10y' - 24y = 0$$

$$\lambda^2 + 10\lambda - 24 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -5 \pm 7$$

Wir erhalten zwei Lösungen

$$y_1 = e^{-12x} \quad \text{und} \quad y_2 = e^{2x}$$

Die allgemeine Lösung der *homogenen* DGL lautet

$$y_0 = c_1 e^{-12x} + c_2 e^{2x} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

Für die partikuläre Lösung machen wir den Ansatz

$$y_p = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

woraus nach Bestimmung der Ableitungen $y'_p = 2a_2 x + a_1$ und $y''_p = 2a_2$ folgt

$$\begin{aligned} 2a_2 + 10(2a_2 x + a_1) - 24(a_2 x^2 + a_1 x + a_0) &= 12x^2 + 14x + 1 \\ -24a_2 x^2 + (-24a_1 + 20a_2)x + (-24a_0 + 10a_1 + 2a_2) &= 12x^2 + 14x + 1 \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir das lineare Gleichungssystem

$$-24a_2 = 12$$

$$-24a_1 + 20a_2 = 14$$

$$-24a_0 + 10a_1 + 2a_2 = 1$$

mit den Lösungen $a_2 = -\frac{1}{2}$, $a_1 = -1$ und $a_0 = -\frac{1}{2}$. Damit ist

$$y_p = -\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2}$$

eine partikuläre Lösung der inhomogenen DGI und die allgemeine Lösung besitzt die Gestalt

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_0 + \mathbf{y}_p = \mathbf{c}_1 \cdot e^{-12x} + \mathbf{c}_2 \cdot e^{2x} - \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

4.7 Systeme linearer Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Viele Problemstellungen können nicht mit einer einzigen Gleichung ausreichend beschrieben werden, sondern sind durch ein Gleichungssystem darstellbar. Diese Feststellung gilt auch für Differenzialgleichungen. In diesem Abschnitt werden wir einige einfache Gleichungssysteme kennenlernen, deren einzelne Gleichungen lineare Differenzialgleichungen sein werden. Es werden bei weitem nicht alle Möglichkeiten behandelt die in der Praxis auftreten können. Zum Thema Differenzialgleichungen (und Systeme) gibt es sehr viel reichhaltige Literatur zur Vertiefung.

Wir betrachten Gleichungssysteme der Form

$$\begin{aligned}y_1' &= a_{1,1}y_1 + a_{1,2}y_2 + g_1(x) \\y_2' &= a_{2,1}y_1 + a_{2,2}y_2 + g_2(x)\end{aligned}$$

4.7.1 Homogene Gleichungssysteme

Zuerst sollen nur homogene Gleichungssysteme betrachtet werden, das bedeutet es tritt kein *Störterm* $g(x)$ auf. Dem inhomogenen Fall widmen wir uns im Anschluss.

Beispiel 4.7.1. Wir betrachten das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}y_1' &= y_1 + y_2 \\y_2' &= 3y_1 - y_2\end{aligned}$$

Hier treten zwei Funktionen y_1 und y_2 auf, sowie deren erste Ableitungen. Genauer handelt es sich um ein *homogenes* System mit konstanten Koeffizienten. Es lässt sich elegant in Matrixform anschreiben.

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Oder noch kompakter

$$\vec{y}' = A\vec{y}$$

Da die Koeffizienten konstant sind, führt der Ansatz $y_i = K_i e^{\lambda x}$ zum Ziel. Wir bilden die ersten Ableitungen und setzen in die Ausgangsgleichung ein:

$$\begin{aligned}y_1' &= K_1 \lambda e^{\lambda x} \\y_2' &= K_2 \lambda e^{\lambda x} \\K_1 \lambda e^{\lambda x} &= K_1 e^{\lambda x} + K_2 e^{\lambda x} \\K_2 \lambda e^{\lambda x} &= 3K_1 e^{\lambda x} - K_2 e^{\lambda x}\end{aligned}$$

Wir können durch $e^{\lambda x}$ dividieren und erhalten

$$\begin{aligned}K_1 \lambda &= K_1 + K_2 \\K_2 \lambda &= 3K_1 - K_2\end{aligned}$$

Wir verwenden jetzt wieder die Matrixschreibweise und formen weiter um.

$$\lambda \vec{K} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \vec{K}$$

$$\lambda \vec{K} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \vec{K} = \vec{0}$$

$$\left(\lambda \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=E} - \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}}_{=A} \right) \vec{K} = \vec{0}$$

$$(\lambda E - A) \vec{K} = \vec{0}$$

Die letzte Gleichung ist aus der Linearen Algebra bekannt, wir haben sie bei der Berechnung von Eigenwerten kennengelernt. Auch hier erhalten wir nichttriviale Lösungen genau dann, wenn die Matrix $(\lambda E - A)$ nicht invertierbar ist, d.h. die Determinante verschwindet.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 3 & -1 - \lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ -(1 - \lambda) \cdot (1 + \lambda) - 3 &= 0 \\ -(1^2 - \lambda^2) - 3 &= 0 \\ \lambda^2 - 4 &= 0 \\ \lambda &= \pm 2 \end{aligned}$$

Wir haben zwei Werte für λ erhalten, die wir als *Eigenwerte* der Matrix A interpretieren können. Jetzt brauchen wir noch Eigenvektoren (Eigenräume) zu den beiden Eigenwerten.

Für $\lambda = 2$ erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix}$$

$$K_1 + K_2 = 2K_1$$

$$3K_1 - K_2 = 2K_2$$

$$K_1 = K_2$$

Ein Eigenvektor wäre z.B. $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Der Eigenraum zu $\lambda = 2$ besteht somit aus allen Vektoren der Form $c_1 \vec{v}_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $c_1 \in \mathbb{R}$.

Wir berechnen noch den Eigenraum zu $\lambda = -2$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix}$$

$$K_1 + K_2 = -2K_1$$

$$3K_1 - K_2 = -2K_2$$

$$K_2 = -3K_1$$

Somit lautet ein Eigenvektor $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Der zugehörige Eigenraum hat die Gestalt $c_2 \vec{v}_2 = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ mit $c_2 \in \mathbb{R}$.

Die beiden Eigenwerte waren verschiedene reelle Zahlen wodurch auch die Eigenvektoren linear unabhängig sind und den gesamten Lösungsraum aufspannen. Die Linearkombination

$$\vec{y} = c_1 e^{\lambda_1 x} \vec{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 x} \vec{v}_2$$

ist somit die gesuchte Lösung.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-2x} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Beispiel 4.7.2. In diesem Beispiel soll der Fall komplexer Eigenwerte demonstriert werden. Der Lösungsweg ist diesmal etwas kompakter zusammengefasst.

Zu lösen ist das DGL-System

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + y_2 \\ y_2' &= -y_1 + y_2 \end{aligned}$$

Die Koeffizienten Matrix lautet $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Wir bestimmen die zugehörigen Eigenwerte:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ -1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ \lambda^2 - 2\lambda + 1 + 1 &= 0 \\ \lambda_{1,2} &= 1 \pm \sqrt{1 - 2} \\ \lambda_1 &= 1 + i \\ \lambda_2 &= 1 - i \end{aligned}$$

Berechnen des Eigenraums zu $\lambda = 1 + i$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix} &= (1 + i) \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix} \\ K_1 + K_2 &= K_1 + iK_1 \\ -K_1 + K_2 &= K_2 + iK_2 \\ K_2 &= iK_1 \end{aligned}$$

Der (komplexe) Eigenraum ist gegeben durch $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$, $c_1 \in \mathbb{C}$.

Achtung: Die multiplikative Konstante ist jetzt auch komplex!

Berechnen des Eigenraums zu $\lambda = 1 - i$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix} = (1 - i) \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix}$$

$$K_1 + K_2 = K_1 - iK_1$$

$$-K_1 + K_2 = K_2 - iK_2$$

$$K_1 = iK_2$$

Der (komplexe) Eigenraum ist gegeben durch $c_2 \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$, $c_2 \in \mathbb{C}$.

Die allgemeine Lösung ergibt sich wieder durch Linearkombinieren der beiden Teillösungen.

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{(1+i)x} + c_2 \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(1-i)x}$$

Sind wir nur an reellen Lösungen interessiert so müssen wir weiter umformen.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^x e^{ix} + c_2 \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^x e^{-ix} \\ &= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^x (\cos(x) + i \sin(x)) + c_2 \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^x (\cos(x) - i \sin(x)) \\ &= c_1 e^x \begin{pmatrix} \cos(x) + i \sin(x) \\ i \cos(x) - \sin(x) \end{pmatrix} + c_2 e^x \begin{pmatrix} i \cos(x) + \sin(x) \\ \cos(x) - i \sin(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wir betrachten jetzt nur noch Realteile, diese sind aber immer noch nicht ablesbar, da unsere Konstanten c_1, c_2 noch einiges durchmischen:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= (a_1 + ib_1) e^x \begin{pmatrix} \cos(x) + i \sin(x) \\ i \cos(x) - \sin(x) \end{pmatrix} + (a_2 + ib_2) e^x \begin{pmatrix} i \cos(x) + \sin(x) \\ \cos(x) - i \sin(x) \end{pmatrix} \\ &= e^x \begin{pmatrix} (a_1 - b_2) \cos(x) + (-b_1 + a_2) \sin(x) \\ (-a_1 + b_2) \sin(x) + (-b_1 + a_2) \cos(x) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} (b_1 + a_2) \cos(x) + (a_1 + b_2) \sin(x) \\ -(b_1 + a_2) \sin(x) + (a_1 + b_2) \cos(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Setzen wir $k_1 := a_1 - b_2$ und $k_2 := -b_1 + a_2$ so lautet die rein reelle Lösung

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = e^x \left(k_1 \begin{pmatrix} \cos(x) \\ -\sin(x) \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} \sin(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix} \right)$$

Das Aufsuchen der reellen Lösung im letzten Beispiel bedarf einiges an ausdauernder (und langweiliger) Rechenarbeit. Analysiert man die Situation genauer und führt die Rechnung allgemein durch, so lässt sich eine starke Abkürzung für die reelle Darstellung gewinnen.

Die Eigenwerte des Systems waren $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$. Wir wählen beliebig einen davon aus (z.B. λ_1) und zerlegen die zugehörige *Teillösung* in Real- und Imaginärteil.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{(1+i)x} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^x e^{ix} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^x (\cos(x) + i \sin(x)) = e^x \left(\begin{pmatrix} \cos(x) \\ -\sin(x) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sin(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix} \right)$$

Ein Vergleich zeigt, dass eine Linearkombination von Real- und Imaginärteil dieses Ausdrucks exakt mit der vorher gewonnen reellen Lösung übereinstimmt. Diese Abkürzung sollte man sich unbedingt merken und wir werden sie in einem späteren Beispiel noch verwenden.

Beispiel 4.7.3. Der Fall einer doppelten reellen Nullstelle liegt beim System

$$\begin{aligned}y_1' &= 4y_1 - 3y_2 \\y_2' &= 3y_1 - 2y_2\end{aligned}$$

vor. Wir gehen wieder nach dem bekannten Schema vor und bestimmen Eigenwerte und Eigenräume.

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 4 - \lambda & -3 \\ 3 & -2 - \lambda \end{vmatrix} &= 0 \\(4 - \lambda)(-2 - \lambda) + 9 &= 0 \\-8 - 2\lambda + \lambda^2 + 9 &= 0 \\ \lambda_{1,2} &= 1 \pm \sqrt{1 - 1} = 1\end{aligned}$$

Der Eigenraum zu $\lambda = 1$ wird bestimmt:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix} \\4K_1 - 3K_2 &= K_1 \\3K_1 - 2K_2 &= K_2 \\K_1 &= K_2\end{aligned}$$

Wir haben den Eigenvektor $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ erhalten. Der Eigenraum hat die Gestalt $c_1 \vec{v}_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c_1 \in \mathbb{R}$. Zur gegebenen 2×2 -Matrix haben wir nur einen *eindimensionalen* Eigenraum erhalten, also gibt es keine Basis aus Eigenvektoren. Daher lässt sich die Koeffizientenmatrix nicht diagonalisieren^a und die Lösung nicht in der bis jetzt verwendeten Linearkombination der Eigenvektoren anschreiben. Wir müssen uns also irgendwie eine weitere linear unabhängige Lösung organisieren. In der Sprache der Lineare Algebra müssen wir einen sogenannten *Hauptvektor* \vec{v}_2 suchen. Diesen erhalten wir als Lösung des Gleichungssystems

$$(A - \lambda E)\vec{v}_2 = \vec{v}_1$$

Es handelt sich hier um ein inhomogenes GLS, das wir jetzt mit unserem Eigenwert $\lambda = 1$ lösen.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\3v_1 - 3v_2 &= 1 \\3v_1 - 3v_2 &= 1 \\v_1 &= \frac{1 + 3v_2}{3}\end{aligned}$$

Wählen wir $v_2 = 0$ gilt $v_1 = \frac{1}{3}$ und unser Hauptvektor lautet $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Die gesuchte zweite Teillösung erhalten wir durch den Term

$$c_2 e^{\lambda x} (\vec{v}_2 + x\vec{v}_1) \quad (c_2 \in \mathbb{R})$$

Die Richtigkeit dieser Aussagen lässt sich durch Einsetzen und Nachrechnen leicht bestätigen. Insgesamt erhalte wir als Lösung des GLS

$$\vec{y} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^x + c_2 e^x \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = e^x \left(c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Wir prüfen jetzt noch die Korrektheit unseres Ansatzes durch Differenzieren:

$$y_1' = c_1 e^x + \frac{c_2}{3} e^x + c_2 (x e^x + e^x) = c_1 e^x + c_2 \left(x e^x + \frac{4 e^x}{3} \right) = e^x \left(c_1 + c_2 \left(x + \frac{4}{3} \right) \right)$$

$$y_2' = c_1 e^x + c_2 (x e^x + e^x) = e^x (c_1 + c_2(x + 1))$$

Jetzt setzen wir in unsere ursprüngliches GLS ein und überprüfen die Gleichheit.

$$4y_1 - 3y_2 = 4 e^x \left(c_1 + \frac{c_2}{3} + c_2 x \right) - 3 e^x (c_1 + c_2 x)$$

$$3y_1 - 2y_2 = 3 e^x \left(c_1 + \frac{c_2}{3} + c_2 x \right) - 2 e^x (c_1 + c_2 x)$$

$$4y_1 - 3y_2 = e^x \left(c_1 + \frac{4c_2}{3} + c_2 x \right) = e^x \left(c_1 + c_2 \left(x + \frac{4}{3} \right) \right) = y_1'$$

$$3y_1 - 2y_2 = e^x (c_1 + c_2 + c_2 x) = e^x (c_1 + c_2(x + 1)) = y_2'$$

^aDie Matrix lässt sich also nicht in *Diagonalgestalt* überführen, es existiert aber immer noch eine recht einfache Darstellung, die *Jordan-Normalform*.

Es ist eine interessante Tatsache, dass es ausreicht Systeme *erster Ordnung* zu studieren, d.h. in den Gleichungen treten nur erste Ableitungen auf. Gleichungssysteme mit höheren Ableitungen können immer durch geeignete Substitutionen auf die schon uns bekannte Form gebracht werden. Es lassen sich sogar gewöhnliche Differentialgleichungen in ein System von Differentialgleichungen umwandeln und dann lösen. Diese Technik soll an einem Beispiel demonstriert werden.

Beispiel 4.7.4. In Beispiel 4.6.4 wurde die DGL $y'' + 2y' - 8y = 0$ gelöst. Wir werden die Lösung jetzt auf einem anderen Weg ermitteln. Da es sich um eine DGL zweiter Ordnung handelt, werden wir auch ein 2×2 -System erstellen müssen. Das Vorgehen zur Erstellung des Systems ist relativ geradeaus. Zuerst schreiben wir einen Vektor $\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ der passenden Dimension (hier 2) auf und leiten diesen formal ab:

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$$

Anschließend rechnen wir den Vektor aus, wobei in der letzten Zeile unsere DGL eingesetzt wird.

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ -2y' + 8y \end{pmatrix}$$

Wenn wir ein System der Form $\vec{u}' = A\vec{u}$ haben wollen, dann müssen wir offensichtlich $u_1 = y$

und $u_2 = y' = u_1'$ substituieren. Wir erhalten das System

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Im so erstellten System ist mehr enthalten als wir ursprünglich ausrechnen wollten. Wir interessieren uns in erster Linie für die Lösung u_1 , denn sie ist die Lösung der gegebenen Differenzialgleichung. Machen wir uns an die Lösung des Systems.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 8-2-\lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ -\lambda(-2-\lambda) - 8 &= 0 \\ \lambda^2 + 2\lambda - 8 &= 0 \\ \lambda_{1,2} &= -1 \pm \sqrt{1+8} = -1 \pm 3 \\ \lambda_1 &= -4 \\ \lambda_2 &= 2 \end{aligned}$$

Wir erhalten die Eigenräume $E_{-4}: c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $E_2: c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Die Lösung des Systems lautet demnach

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-4x} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2x} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Die erste Zeile entspricht der schon aus Beispiel 4.6.4 bekannten Lösung

$$y = u_1 = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{2x}$$

4.7.2 Inhomogene Gleichungssysteme

Inhomogene Gleichungssysteme haben noch einen weiteren Term $g(x)$ in den Gleichungen, in dem weder die gesuchte Funktion y noch deren Ableitungen vorkommen. Unsere DGL-Systeme haben die Form

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{1,1}y_1 + a_{1,2}y_2 + g_1(x) \\ y_2' &= a_{2,1}y_1 + a_{2,2}y_2 + g_2(x) \end{aligned}$$

Beispiel 4.7.5. Wir werden die Lösungsmethode wieder mit einem Beispiel demonstrieren, im Wesentlichen beruht sie auf der schon bekannten Idee der *Variation der Konstanten*.

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + 2y_2 \\ y_2' &= 5y_1 + 4y_2 + e^x \end{aligned}$$

Zuerst lösen wir den homogenen Fall, d.h. wir ignorieren vorerst den Störterm e^x .

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 5 & 4 - \lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ (1 - \lambda)(4 - \lambda) - 10 &= 0 \\ 4 - 5\lambda + \lambda^2 - 10 &= 0 \\ \lambda_{1,2} &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + 6} = \frac{5}{2} \pm \frac{7}{2} \\ \lambda_1 &= 6 \\ \lambda_2 &= -1 \end{aligned}$$

Zugehörige Eigenvektoren sind für $\lambda_1 = 6$ mit $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\lambda_2 = -1$ mit $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ gegeben. Die allgemeine Lösung des homogenen Systems lautet daher

$$\vec{y}_0 = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} e^{6x} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-x} = c_1 \begin{pmatrix} 2e^{6x} \\ 5e^{6x} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{-x} \\ -e^{-x} \end{pmatrix}$$

Wir variieren jetzt die beiden Konstanten c_1, c_2 , d.h. wir betrachten $c_1(x)$ und $c_2(x)$. Die Herleitung der Endformel überspringen wir an dieser Stelle, sie führt zum Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2e^{6x} & e^{-x} \\ 5e^{6x} & -e^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^x \end{pmatrix}$$

Wir merken uns, dass die Koeffizientenmatrix aus den Spaltenvektoren der Eigenräume besteht, die rechte Seite der Gleichung entspricht dem inhomogenen Anteil des GLS.

Wir bestimmen jetzt die beiden Ableitungen $c_1'(x)$ und $c_2'(x)$.

$$\begin{aligned} 2e^{6x} c_1'(x) + e^{-x} c_2'(x) &= 0 \\ 5e^{6x} c_1'(x) - e^{-x} c_2'(x) &= e^x \\ 7e^{6x} c_1'(x) &= e^x \\ c_1'(x) &= \frac{e^{-5x}}{7} \\ c_2'(x) &= -\frac{2e^{2x}}{7} \end{aligned}$$

Durch Integration erhalten wir die gesuchte Lösung:

$$c_1(x) = -\frac{e^{-5x}}{35} + k_1 \qquad c_2(x) = -\frac{e^{2x}}{7} + k_2$$

Die allgemeine Lösung des *inhomogenen* Systems lautet somit

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= \left(-\frac{e^{-5x}}{35} + k_1 \right) \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} e^{6x} + \left(-\frac{e^{2x}}{7} + k_2 \right) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-x} \\ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{e^x}{5} + 2k_1 e^{6x} + k_2 e^{-x} \\ 5k_1 e^{6x} - k_2 e^{-x} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit beliebigen Konstanten $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

4.7.3 Anwendungsbeispiele

Zum Abschluss dieses Abschnitts werden noch einige praktische Anwendungen betrachtet. Wir werden den Lösungsweg kompakt notieren um die tatsächliche Anwendung im Fokus zu behalten. Die verwendeten Methoden wurden alle in den vorigen Abschnitten ausführlich demonstriert.

Beispiel 4.7.6. Zwei Druckluftbehälter mit unterschiedlichen Volumina sind durch eine zunächst verschlossene Röhre verbunden. Vor dem Öffnen des Ventils bei $t = 0$ liegen die beiden unterschiedlichen Druckpegel $p_1(0)$ und $p_2(0)$ vor. Das physikalische Modell für den isothermen Ausgleich bei Öffnung des Ventils liefert das System

$$\begin{pmatrix} \dot{p}_1(t) \\ \dot{p}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 & a_1 \\ a_2 & -a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{pmatrix} \quad .t > 0$$

Die Koeffizienten der Matrix sind durch $a_{1,2} = \frac{RT}{WV_{1,2}}$ gegeben. Hier bezeichnen R die Gaskonstante, T die Temperatur, $V_{1,2}$ die Volumina der Behälter und W den Strömungswiderstand der Verbindungsleitung.

Als Anfangsbedingungen sind $p_1(0) = 1$ und $p_2(0) = 9$, sowie die Konstanten $a_1 = 1[\frac{\text{bar}}{\text{s}}]$ und $a_2 = 3[\frac{\text{bar}}{\text{s}}]$ gegeben. Wir werden zwei Fragestellungen beantworten:

- Welcher Behälter erreicht einen Druck von zwei Bar und nach welcher Zeit?
- Welcher Druck wird nach einem vollständigen Druckausgleich erreicht?

Um diese Fragen zu beantworten müssen wir das DGL-System zuerst lösen^a.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 - \lambda & 1 \\ 3 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = (-1 - \lambda)(-3 - \lambda) - 3 = 3 + 4\lambda + \lambda^2 - 3 = \lambda(4 + \lambda) = 0$$

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = -4$$

Zugehörige Eigenräume sind durch $E_0: c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $E_{-4}: c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ gegeben. Damit erhalten wir als allgemeine Lösung des Systems

$$\vec{p}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{0t} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-4t} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-4t} \quad , c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Setzen wir noch die Anfangswerte $\vec{p}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}$ ein, so erhalten wir $c_1 = 3$ und $c_2 = 2$. Die Lösung unseres Problems lautet demnach

$$\begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 2e^{-4t} \\ 3 + 6e^{-4t} \end{pmatrix}$$

Zur Beantwortung der Frage in Punkt a) lösen wir die Gleichungen $p_{1,2} = 2$.

$$p_1(t) = 2 = 3 - 2e^{-4t}$$

$$\frac{1}{2} = e^{-4t}$$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -4t$$

$$t \approx$$

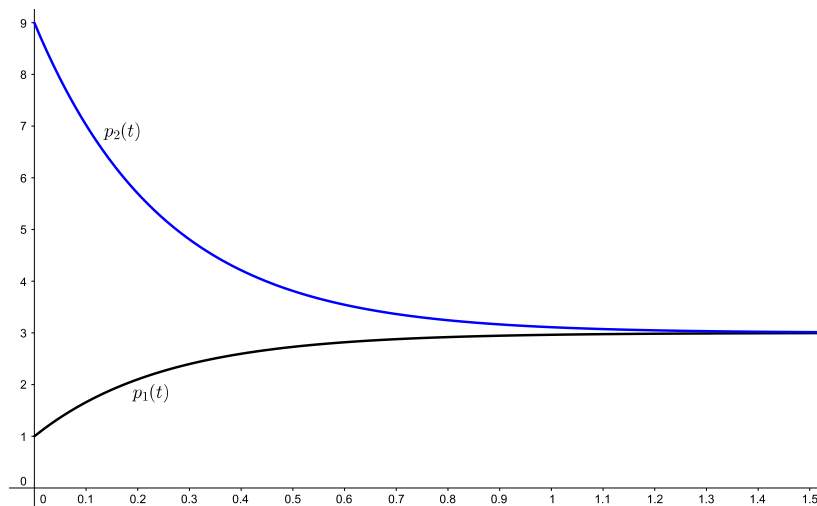
$$0,17[\text{s}]$$

Der erste Behälter erreicht nach rund 0,17 Sekunden einen Druck von zwei Bar. Die zweite Gleichung $p_2(t) = 3 + 6e^{-4t} = 2$ ist nicht lösbar, da $3 + 6e^{-4t} > 3$ für alle t gilt. Der zweite Behälter wird also nie den gesuchten Druck erreichen.

Die Antwort auf Frage b) erhalten wir durch den Grenzübergang $t \rightarrow \infty$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{p}(t) = \begin{pmatrix} \lim_{t \rightarrow \infty} (3 - 2e^{-4t}) \\ \lim_{t \rightarrow \infty} (3 + 6e^{-4t}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Der Druck in beiden Behältern beträgt 3 Bar.



Die Abbildung zeigt den Verlauf der beiden Drücke $p_1(t)$ und $p_2(t)$.

^aWir lassen bei der Rechnung alle Einheiten weg.

Beispiel 4.7.7. Wir betrachten eine Anwendung aus der Medizin, die den Verlauf einer Medikamentenkonzentration im Körper modelliert.

Ein Medikament wird mit der Rate $M(t)$ kontinuierlich aufgenommen. Die Massenkonzentration im Magen-Darm-Trakt sei $x_1(t)$, jene im Blutkreislauf $x_2(t)$. Unter der Annahme proportionaler Ausscheidungsraten kann die Konzentration durch das System

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} -a_1 & 0 \\ a_1 & -a_2 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} M(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

passend modelliert werden. Wir bestimmen die speziellen Lösungen für $M(t) = 1$ und $a_1 = a_2 = 1$.

Zuerst lösen wir das homogene System:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ (-1-\lambda)^2 &= 0 \\ \lambda^2 + 2\lambda + 1 &= 0 \\ \lambda_{1,2} &= -1 \pm \sqrt{1-1} = -1 \end{aligned}$$

Zum doppelten Eigenwert $\lambda = -1$ suchen wir Eigenvektoren.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix} \\ -K_1 &= -K_1 \\ K_1 - K_2 &= -K_2 \implies K_1 = 0 \end{aligned}$$

Wir erhalten den Eigenvektor $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und den zugehörigen Eigenraum E_{-1} : $c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c_1 \in \mathbb{R}$.
Wie schon in Beispiel 4.7.3 müssen wir uns einen zweiten Basisvektor \vec{v}_2 über die Gleichung

$$\begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} \vec{v}_2 = \vec{v}_1$$

organisieren.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten direkt $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ als eine Lösung, die offensichtlich linear unabhängig zu \vec{v}_1 ist.
Insgesamt gilt

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 e^{-t} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Jetzt können wir den inhomogenen Fall betrachten und verwenden wieder die Methode der Variation der Konstanten.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ t e^{-t} \end{pmatrix}$$

Wir berechnen die variierten Konstanten:

$$\begin{pmatrix} 0 & e^{-t} \\ e^{-t} & t e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$c_2'(t) e^{-t} = 1 \implies c_2'(t) = e^t \implies c_2(t) = e^t + k_1, \quad k_1 \in \mathbb{R}$$

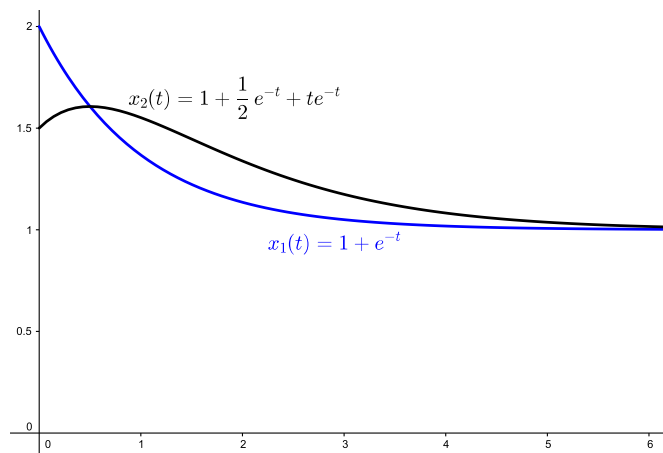
$$e^{-t} c_1'(t) + t e^{-t} c_2'(t) = 0$$

$$c_1'(t) + t e^t = 0 \implies c_1'(t) = -t e^t \implies c_1(t) = -e^t(t-1) + k_2, \quad k_2 \in \mathbb{R}$$

Als Endergebnis für das Ausgangsproblem gilt die Gleichung

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= (-e^t(t-1) + k_2) \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix} + (e^t + k_1) \begin{pmatrix} e^{-t} \\ te^{-t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + k_1 e^{-t} \\ -t + 1 + k_2 e^{-t} + t + k_1 t e^{-t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + k_1 e^{-t} \\ 1 + k_2 e^{-t} + k_1 t e^{-t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Zum Schluss soll noch eine Grafik gezeigt werden, die einen beispielhaften Verlauf beide Konzentrationen darstellt. Je nach Wahl der Konstanten können die Kurven zu Beginn recht unterschiedlich aussehen.

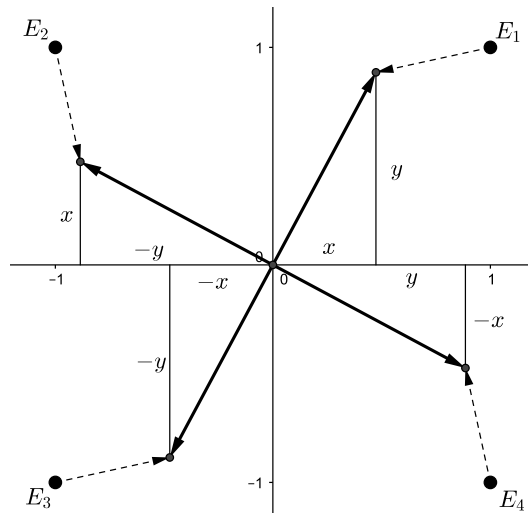


Beide Konzentrationen streben im zeitlichen Verlauf dem Wert 1 entgegen. Dies liegt auch daran, dass dieses Modell von einer kontinuierlichen Zufuhr $M(t) = 1$ an Medikamenten ausgeht.

Beispiel 4.7.8. Vier Laufenten E_i $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ sitzen an den Eckpunkten des zum Ursprung symmetrischen Quadrats $[P_1(1; 1), P_2(-1; 1), P_3(-1; -1), P_4(1; -1)]$. Da sie sich in der Gruppe wohler fühlen als alleine, versucht jede Ente die jeweils vor ihr sichtbare Ente zu erreichen. Wir gehen davon aus, dass alle Enten gleich schnell gegen den Uhrzeigersinn zu laufen beginnen. Gesucht ist der Bahnverlauf der Enten unter diesen Voraussetzungen.

Eine wichtige Überlegung ist, dass alle Ortsvektoren der Enten durch den Ortsvektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ der ersten Ente E_1 im Punkt P_1 beschreibbar sind. Dies liegt an der Symmetrie der Startpunkte und dem äquivalenten Verhalten jeder Ente.

Sei also $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ der Ortsvektor von E_1 . Beginnen die Enten zu laufen, so ändern sich die Richtungsvektoren ihrer Wege gleich stark. Aufgrund der Symmetrie ist klar, dass E_3 sich so wie E_1 verhält, allerdings mit dem Ortsvektor $\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$. Die anderen Koordinaten ergeben sich ebenfalls rein geometrisch aus der folgenden Skizze.



Wenn wir den Weg einer Ente berechnet haben, so können wir durch die Symmetrie der Aufgabe sofort auch alle anderen Wege angeben. Konzentrieren wir uns daher auf den Weg von Ente E_1 .

Wenn die Ente im Punkt $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ angekommen ist, dann geht sie weiter in Richtung von Ente E_2 wir müssen also den Verbindungsvektor von E_1 zu E_2 bestimmen.

$$\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y - x \\ x - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Betrachten wir sehr kleine Zeitabstände, so werden die Richtungsvektoren zu Tangentialvektoren an die Bahnkurve und wir erhalten das lineare Differenzialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Wir lösen das System wie schon bekannt auf.

$$\begin{vmatrix} -1 - \lambda & -1 \\ 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-1 - \lambda)^2 + 1 = 0$$

$$1 + 2\lambda + \lambda^2 + 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{-1} = -1 \pm i$$

Die beiden Eigenwerte sind konjugiert komplex. Wir bestimmen wieder die Eigenräume.

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (-1 + i) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$-x - y = -x + ix$$

$$x - y = -y + iy$$

$$y = -ix$$

Zu $\lambda = -1 + i$ haben wir den Eigenraum $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$, $c_1 \in \mathbb{C}$ erhalten.

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (-1 - i) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} -x - y &= -x - iy \\ x - y &= -y - iy \\ y &= ix \end{aligned}$$

Zu $\lambda = -1 - i$ haben wir den Eigenraum $c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$, $c_2 \in \mathbb{C}$ erhalten. Aus der allgemeinen komplexen Lösung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{(-1+i)t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{(-1-i)t}$$

bestimmen wir noch die für uns interessante reelle Lösung des Systems. Dazu erinnern wir uns an die Abkürzung aus Beispiel 4.7.2! Wir wählen einen beliebigen Eigenwert und zerlegen die entsprechende Teillösung in Real- und Imaginärteil.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{-t} e^{it} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{-t} (\cos(t) + i \sin(t)) = e^{-t} \left(\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix} \right)$$

Damit lautet die reelle Lösung unseres Systems

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{-t} \left(k_1 \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix} \right) \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

Obwohl wir unsere Rechnung nur unter Betrachtung von Ente E_1 durchgeführt haben, liefert unsere Lösung tatsächlich auch alle Ergebnisse der anderen Enten! Wir brauchen nur die passenden Anfangsbedingungen einsetzen und erhalten dementsprechende Konstanten k_1, k_2 .

Für Ente E_1 gelten die Bedingungen $x(0) = y(0) = 1$. Daraus errechnen wir die Konstanten

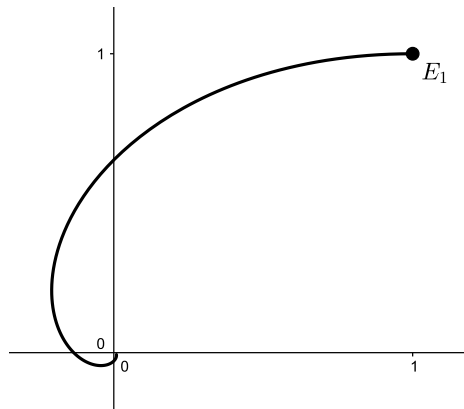
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = e^0 \left(k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} k_1 \\ -k_2 \end{pmatrix}$$

$$k_1 = 1$$

$$k_2 = -1$$

Damit läuft unsere Ente E_1 gemäß der Kurve

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos(t) - \sin(t) \\ \sin(t) + \cos(t) \end{pmatrix} \quad t \geq 0$$



4.7.4 Trajektorien und Phasendiagramm

Bis jetzt haben wir die gegebenen GLS exakt gelöst und die wichtigsten analytischen Methoden dafür kennengelernt. Wir werden jetzt das *Lösungsverhalten* studieren, also untersuchen, welche Phänomene bei Lösungen von (linearen) Differenzialgleichungssystemen auftreten können.

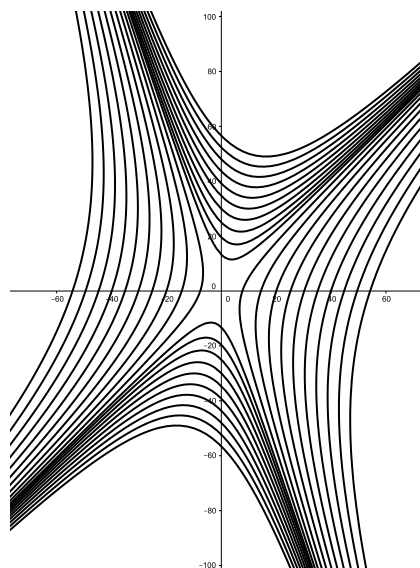
Beginnen wir mit dem schon bekannten System

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + y_2 \\ y_2' &= 3y_1 - y_2 \end{aligned}$$

und der zugehörigen Lösung

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-2x} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Wir können den Vektor $\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$ als Ortsvektor in der Ebene interpretieren und für verschiedene Konstanten c_1, c_2 die parametrisierte Ortskurve plotten. Das haben wir auch schon im vorigen Beispiel mit den Laufwegen der Enten gemacht.



Solche Ortskurven werden *Trajektorien* genannt, die Grafik selbst heißt *Phasendiagramm*. Das abgebildete Muster ist charakteristisch für 2×2 -Systeme bei denen zwei verschiedene reelle Eigenwerte $\lambda_{1,2}$ auftreten, die $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ erfüllen. Aus der Grafik ist auch ersichtlich, dass sich die Trajektorien asymptotisch den Richtungen der Eigenvektoren annähern.

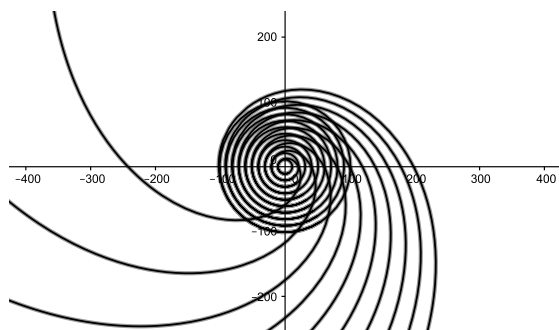
Ein weiteres von früher bekanntes System ist

$$\begin{aligned}y_1' &= y_1 + y_2 \\y_2' &= -y_1 + y_2\end{aligned}$$

mit der Lösung

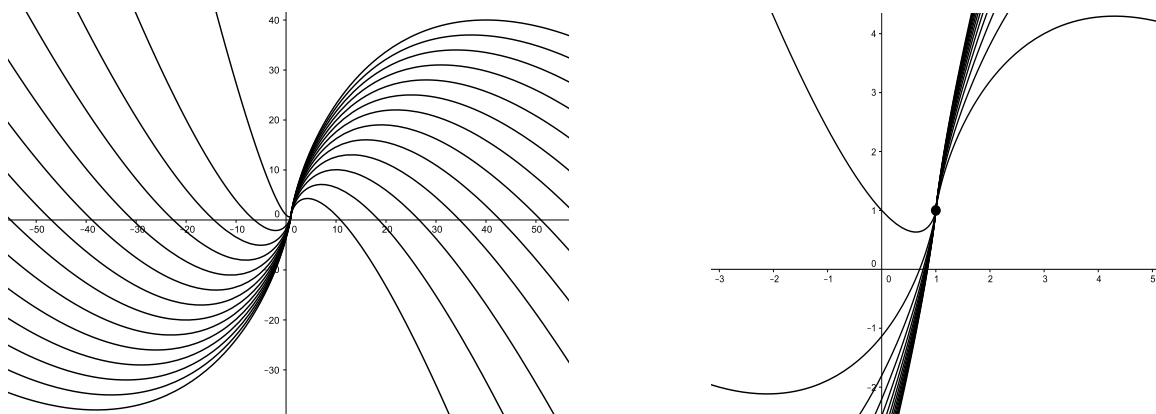
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = e^x \left(c_1 \begin{pmatrix} \cos(x) \\ -\sin(x) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix} \right)$$

Die Trajektorien haben diesmal ein anderes Verlaufsmuster. Dieses Verhalten ist wieder den Eigenwerten geschuldet, die im vorliegenden Fall konjugiert komplex sind ($\lambda_{1,2} = 1 \pm i$).



Je nach Wert von Real- und Imaginärteil der Eigenwerte können solche *Spiralpunkte* anziehend oder abstoßend wirken, d.h. die Lösung bleibt stabil bei einem Punkt² oder sie entfernt sich, ist also instabil.

Für das Beispiel der Medikamentenkonzentration bei dem die Eigenwerte $\lambda_{1,2} = -1$ aufgetreten sind, geben wir auch noch das Phasendiagramm an.



Wir haben schon früher die Konvergenz gegen den Wert 1 angemerkt, auch im Diagramm lässt sich dieser Zustand als asymptotisch stabil identifizieren.

²Konvergiert die Lösung tatsächlich zu einem Punkt, dann wird sie *asymptotisch stabil* genannt.

5 Fourier-Reihen

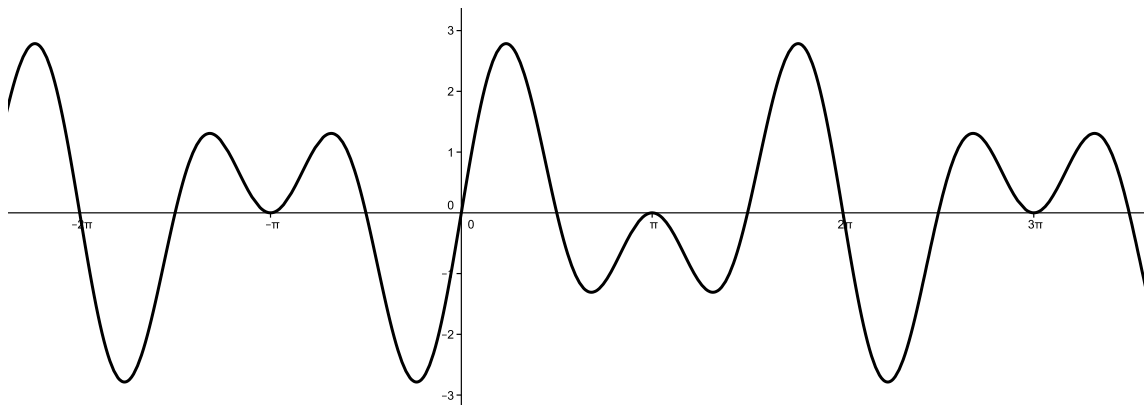
Benannt sind diese bemerkenswerten Reihen nach dem französischen Mathematiker und Naturwissenschaftler *Joseph Fourier*¹, der mit ihrer Entwicklung den Grundstein der modernen Physik und Technik legte. Bis heute hat die *Fourier-Analyse* nichts an Aktualität verloren, das *jpg*-Bildformat benutzt beispielsweise dieses Verfahren in seinen Kompressionsalgorithmen.

5.1 Einleitung

Sehr viele technische Vorgänge sind periodisch und in den einfachsten Fällen lässt sich dieser Vorgang durch eine Funktion der Form $y(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$ darstellen. Diese reine Sinusschwingung kann wiederum als Überlagerung (Superposition) gleichfrequenter Sinus- und Kosinusschwingungen dargestellt werden.

$$y(t) = A_1 \sin(\omega t) + A_2 \cos(\omega t)$$

Eine interessante und wichtige Fragestellung war es nun, ob es grundsätzlich möglich ist, jeden periodischen Vorgang durch solche Einzelschwingungen zusammenzusetzen.



Die Abbildung zeigt einen periodischen Vorgang, der in harmonische Einzelschwingungen zerlegt werden soll, d.h. wir suchen eine Darstellung der Form²

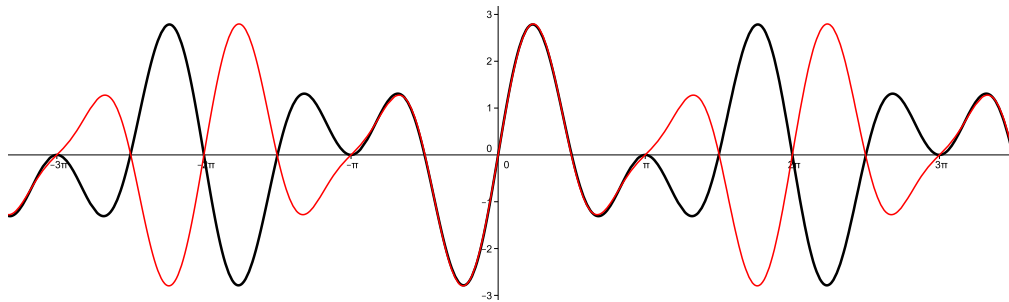
$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)) \quad (5.1)$$

Diese *trigonometrische* Reihe wird **Fourier-Reihe**, die Entwicklung solcher Reihen **Fourier-Analyse** genannt.

Wir werden Voraussetzungen kennenlernen, unter denen es möglich sein wird, Funktionen in Fourier-Reihen zu entwickeln. Die auftretenden Koeffizienten a_n, b_n werden **Fourierkoeffizienten** genannt. Die oben abgebildete Funktion kann in eine Fourier-Reihe entwickelt werden, bricht man die Reihe (5.1) bei $n = 4$ ab, erhält man die nachfolgend abgebildete Näherung.

¹Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)

²Der Faktor $\frac{1}{2}$ bei a_0 hat nur kosmetische Gründe.



Dieser Ausschnitt zeigt sehr schön die gute Approximation im Intervall $[-\pi; \pi]$. Je mehr Reihenglieder berücksichtigt werden, desto besser wird die Näherung. Aufgrund der Periodizität wechselt die Qualität der Approximation in diesem Fall auch periodisch. Im Intervall $[-\pi; \pi]$ haben wir eine sehr gute Näherung, von π bis 3π aber noch gar keine.

5.2 Entwicklung einer periodischen Funktion in eine Fourier-Reihe

Bei den folgenden Überlegungen gehen wir immer von einer periodischen Funktion $f(x)$ mit Periode $T = 2\pi$ aus. Somit gilt $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$.

Wir wollen jetzt an die Berechnung der einzelnen Fourierkoeffizienten gehen. Dazu integrieren wir die Fourier-Reihe *gliedweise*:

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{a_0}{2} \int_0^{2\pi} 1 dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \int_0^{2\pi} \cos(n \cdot x) dx + b_n \cdot \int_0^{2\pi} \sin(n \cdot x) dx \right)$$

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{a_0}{2} \cdot 2\pi + 0 + 0 = a_0 \cdot \pi$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx$$

damit hätten wir eine Formel für unseren ersten Koeffizienten a_0 erhalten. Wir berechnen jetzt noch die Koeffizienten $a_n (n > 0)$, die b_n funktionieren dann analog.

Wir multiplizieren Gleichung (5.1) mit $\cos(mx)$, $m \in \mathbb{N}$ und integrieren wieder gliedweise.

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos(mx) dx = \frac{a_0}{2} \int_0^{2\pi} \cos(mx) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_0^{2\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx + b_n \int_0^{2\pi} \sin(nx) \cos(mx) dx \right)$$

Diese Gleichung sieht zuerst einmal überwältigend aus, doch verschwinden in Wahrheit fast alle Integrale der rechten Seite. Einzig für den Fall $m = n$ bleibt das Integral

$$\int_0^{2\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx = \int_0^{2\pi} \cos(nx)^2 dx = \pi$$

übrig. Daher reduziert sich unsere Ausgangsgleichung zu

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos(mx) dx = \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx = a_n \pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

Eine völlig analoge Rechnung führt zur Formel für die Koeffizienten b_n .

Satz 5.2.1. Eine 2π -periodische Funktion $f(x)$ lässt sich in eine Fourier-Reihe entwickeln, wenn

1. sich ihr Periodenintervall in endlich viele Teilintervalle zerlegen lässt, in denen $f(x)$ stetig und monoton ist.
2. in allen Unstetigkeitsstellen der rechts- und linksseitige Grenzwert existiert.

Die Fourier-Reihe hat die Form

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

mit den Fourierkoeffizienten

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad (n > 0)$$

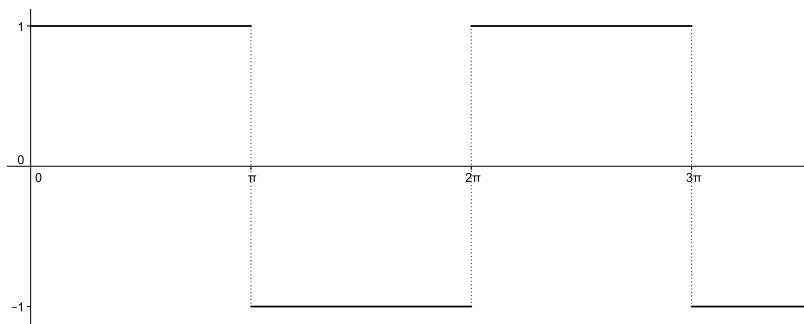
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx \quad (n > 0)$$

Beispiel 5.2.2.

Wir entwickeln die dargestellte $p = 2\pi$ periodische *Rechteckskurve*

$$f(x) = \begin{cases} +1 & 0 \leq x \leq \pi \\ -1 & \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

in eine Fourier-Reihe.



Da $f(x)$ eine *ungerade* Funktion ist, brauchen wir nur die Reihe

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

betrachten. Die Berechnung der Koeffizienten b_n erfolgt mittels der vorher ermittelten Formel.

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} 1 \cdot \sin(nx) dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-1) \cdot \sin(nx) dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx - \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{n} \cos(nx) \right]_0^{\pi} - \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{n} \cos(nx) \right]_{\pi}^{2\pi} \\ &= \frac{1}{n\pi} (-\cos(n\pi) + \cos(0)) + \frac{1}{n\pi} (\cos(n2\pi) - \cos(n\pi)) = \frac{1}{n\pi} (-2\cos(n\pi) + 2) \end{aligned}$$

Wir müssen jetzt unterscheiden, ob n eine gerade oder ungerade Zahl ist.

1. Fall, n ist gerade ($n = 2k, k \in \mathbb{N}$):

$$b_n = b_{2k} = \frac{1}{2k\pi}(-2 \cos(2k\pi) + 2) = 0$$

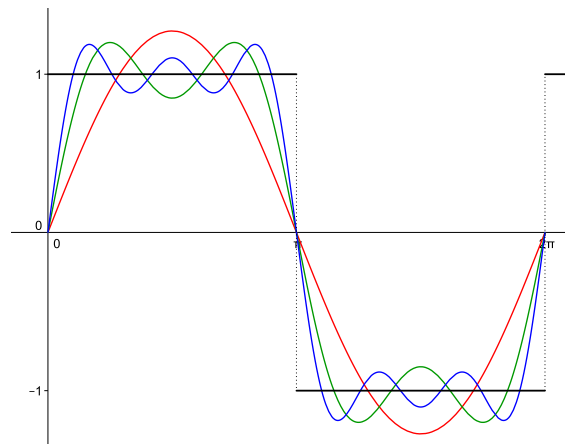
2. Fall, n ist ungerade ($n = 2k - 1, k \in \mathbb{N}$):

$$b_n = b_{2k-1} = \frac{1}{(2k-1)\pi}(-2 \cos((2k-1)\pi) + 2) = \frac{4}{(2k-1)\pi}$$

Die Fourier-Reihe hat somit die Darstellung

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi} \cdot \sin((2k-1)x) = \frac{4}{\pi} \left[\sin(x) + \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{1}{5} \sin(5x) + \dots \right]$$

Die nachfolgende Abbildung zeigt einige Näherungen im Vergleich zur Rechteckskurve.



Bemerkung 5.2.3. Die Herleitung der Formeln für die Fourier-Koeffizienten a_n, b_n war sehr direkt und kurz. Das liegt auch daran, dass dieser Zugang erst gefunden wurde, als man die Formeln bereits (durch wesentlich kompliziertere Rechnungen) kannte. Leider geht dadurch eine intuitive und geometrische Anschauung verloren, die wir jetzt kennenlernen werden. Der Begriff des Vektorraums war zu Zeiten Eulers und Fouriers noch nicht bekannt. Erst dadurch war es möglich die Theorie von Fourier (und Euler) in einen konsistenten Rahmen einzubetten.

In Beispiel 5.2.2 haben wir die 2π -periodische Funktion

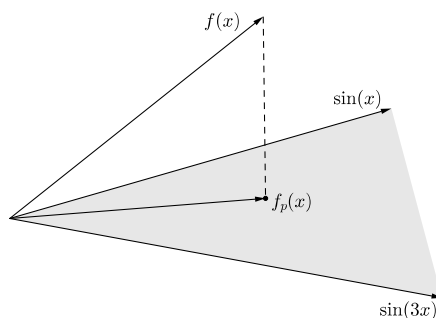
$$f(x) = \begin{cases} +1 & 0 \leq x \leq \pi \\ -1 & \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

in eine Fourier-Reihe entwickelt. Diese Funktion ist Element eines Vektorraums, den wir mit $L^2(0; 2\pi)$ bezeichnen wollen.³ Dieser Raum beinhaltet auch alle trigonometrischen Polynome

$$p(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

Wir können daher versuchen die Funktion $f(x)$ durch solche Polynome anzunähern. Geben wir uns den zweidimensionalen Unterraum $\text{span}(\{\sin(x); \sin(3x)\})$ vor, so suchen wir die orthogonale Projektion $f_p(x)$ von $f(x)$ auf diese Ebene.

³Vergleiche Abschnitt 5.5 - Fourierreihen unter der Lupe.



Für orthogonale Projektionen auf den Unterraum $\text{span}(\{u(x); w(x)\})$ haben wir schon die einfache Projektionsformel

$$f_p(x) = \langle f(x), u(x) \rangle \cdot u(x) + \langle f(x), w(x) \rangle \cdot w(x)$$

aus der linearen Algebra kennengelernt, falls $u(x)$ und $w(x)$ orthogonal und normiert sind. In unserem Fall gilt $u(x) = \sin(x)$ und $w(x) = \sin(3x)$. Jetzt müssen wir noch die Orthogonalität und Normiertheit nachprüfen, wobei das Skalarprodukt $\int_0^{2\pi} f \cdot g \, dx$ zur Anwendung kommt.

$$\|u(x)\| = \|\sin(x)\| = \sqrt{\int_0^{2\pi} \sin(x) \cdot \sin(x) \, dx} = \sqrt{\left[\frac{1}{2} (x - \sin(x) \cos(x)) \right]_0^{2\pi}} = \sqrt{\pi - 0} = \sqrt{\pi}$$

$$\|w(x)\| = \|\sin(3x)\| = \sqrt{\int_0^{2\pi} \sin(3x) \cdot \sin(3x) \, dx} = \sqrt{\left[\frac{1}{2} \left(x - \frac{\sin(6x)}{6} \right) \right]_0^{2\pi}} = \sqrt{\pi - 0} = \sqrt{\pi}$$

$$\langle \sin(x), \sin(3x) \rangle = \int_0^{2\pi} \sin(x) \cdot \sin(3x) \, dx = \left[\sin^3(x) \cos(x) \right]_0^{2\pi} = 0$$

Die Rechnungen zeigen, dass die Orthogonalität gegeben ist, wir aber die Funktionen noch skalieren müssen. Zu bestimmen ist also die Projektion

$$f_p(x) = \left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(x) \right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(x) + \left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(3x) \right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(3x)$$

Diese Projektion kann direkt ausgerechnet werden:

$$\begin{aligned} f_p(x) &= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} 1 \cdot \sin(x) \, dx - \int_{\pi}^{2\pi} 1 \cdot \sin(x) \, dx \right) \cdot \sin(x) \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} 1 \cdot \sin(3x) \, dx - \int_{\pi}^{2\pi} 1 \cdot \sin(3x) \, dx \right) \cdot \sin(3x) \\ &= \frac{1}{\pi} (2 - (-2)) \cdot \sin(x) + \frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3} \right) \right) \cdot \sin(3x) \\ &= \frac{4}{\pi} \sin(x) + \frac{4}{3\pi} \sin(3x) \end{aligned}$$

Damit haben wir das gleiche Ergebnis für die ersten beiden Summanden aus Beispiel 5.2.2 erhalten. Das Entwickeln einer Funktion in eine Fourier-Reihe entspricht also der orthogonalen Projektion auf den Unterraum der trigonometrischen Polynome.

5.3 Komplexe Darstellung der Fourier-Reihe

Eine (reelle) Fourier-Reihe kann mit Hilfe der Identitäten

$$\begin{aligned}\cos(nx) &= \frac{1}{2} (e^{inx} + e^{-inx}) \\ \sin(nx) &= \frac{1}{2i} (e^{inx} - e^{-inx})\end{aligned}$$

in eine komplexe Darstellung umgeformt werden. Ohne die Herleitung hier wiederzugeben, wollen wir das Endergebnis im folgenden Satz darstellen.

Satz 5.3.1. Die komplexe Fourier-Reihe einer 2π -periodische Funktion $f(x)$ hat die Darstellung

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{inx}$$

mit den Koeffizienten

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot e^{-inx} dx$$

Ein Wechsel der Darstellungsformen ist über die folgenden Formel möglich.

- Reell zu komplex:

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0 \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \quad c_{-n} = \bar{c}_n = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$$

- Komplex zu reell:

$$a_0 = 2c_0 \quad a_n = c_n + c_{-n} \quad b_n = i(c_n - c_{-n})$$

Bemerkung 5.3.2. Wir haben bis jetzt immer nur 2π -periodische Funktionen $f(x)$ betrachtet. Der allgemeine Fall

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(n\omega_0 t) + b_n \cdot \sin(n\omega_0 t))$$

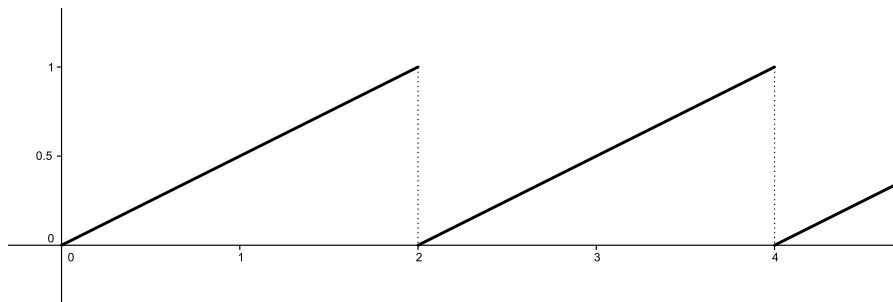
bzw.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{in\omega_0 t}$$

mit Periodendauer $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ und Periodenintervall (T) wird durch eine leichte Adaption der schon bekannten Koeffizientenformeln abgedeckt.

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{2}{T} \int_{(T)} f(t) dt & a_n &= \frac{2}{T} \int_{(T)} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt & b_n &= \frac{2}{T} \int_{(T)} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt \\ c_n &= \frac{1}{T} \int_{(T)} f(t) \cdot e^{-in\omega_0 t} dt\end{aligned}$$

Beispiel 5.3.3. Wir bestimmen die Fourier-Zerlegung der folgenden Kippspannung mit Schwingungsdauer $T = 2$.



Im Intervall $0 \leq t < 2$ wird die Impulsfolge durch die Gleichung

$$u(t) = \frac{1}{2} \cdot t$$

dargestellt. Da der Weg über die komplexe Darstellung oft der kürzere ist, berechnen wir vorerst nur die Koeffizienten c_n .

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \cdot e^{-in\omega_0 t} dt = \frac{1}{4} \underbrace{\int_0^2 t \cdot e^{-in\pi t} dt}_{=: I_n}$$

Die Auswertung des Integrals erfordert eine Fallunterscheidung.

1. Fall ($n = 0$):

$$I_n = \int_0^2 t \cdot 1 dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^2 = 2$$

$$c_0 = \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}$$

2. Fall ($n \neq 0$):

$$I_n = \int_0^2 t \cdot e^{-in\pi t} dt = \left[\frac{-in\pi t - 1}{i^2 n^2 \pi^2} \cdot e^{-in\pi t} \right]_0^2 = \frac{1}{n^2 \pi^2} [(in\pi t + 1) \cdot e^{-in\pi t}]_0^2$$

$$= \frac{1}{n^2 \pi^2} \left[(2in\pi + 1) \cdot \underbrace{e^{-2in\pi}}_{=1} - 1 \right] = \frac{2in\pi}{n^2 \pi^2} = \frac{2i}{n\pi}$$

$$c_n = \frac{1}{4} \cdot \frac{2i}{n\pi} = \frac{i}{2n\pi}$$

Aus den c_n errechnen wir nun die reellen Koeffizienten

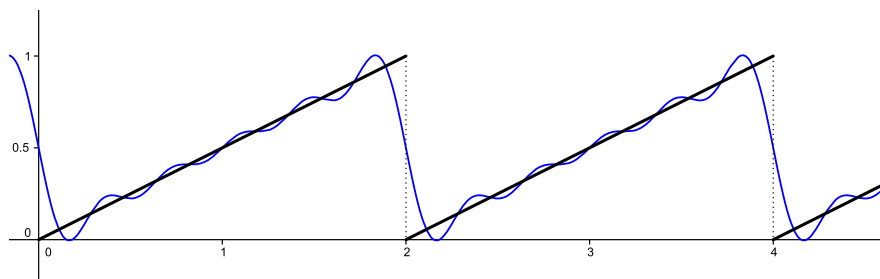
$$a_0 = 2 \cdot c_0 = 1$$

$$a_n = c_n + \bar{c}_n = \frac{i}{2n\pi} - \frac{i}{2n\pi} = 0$$

$$b_n = i(c_n - \bar{c}_n) = i\left(\frac{i}{2n\pi} + \frac{i}{2n\pi}\right) = -\frac{2}{2\pi n} = -\frac{1}{\pi n}$$

Die Kippspannung enthält somit neben dem konstanten Anteil nur Sinusterme, die Reihendarstellung lautet

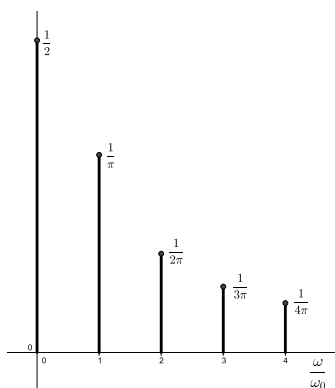
$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin(n\pi t) = \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{\pi n} \cdot \sin(n\pi t) = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \left[\sin(\pi t) + \frac{1}{2} \sin(2\pi t) + \frac{1}{3} \sin(3\pi t) + \dots \right] \end{aligned}$$



Eine kurze Zusammenfassung der Komponenten, die in der Kippspannung enthalten sind.

- Der Gleichspannungsanteil $\frac{1}{2}$.
- Die sinusförmige *Grundschwingung* mit Kreisfrequenz $\omega_0 = \pi$ und Amplitude $\frac{1}{\pi}$.
- Sinusförmige *Oberschwingungen* mit den Kreisfrequenzen $2\pi, 3\pi, \dots$ und zugehörigen Amplituden $\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{3\pi}, \dots$

Einen guten Einblick in die Struktur unserer Kippspannung gewinnen wir über das *Amplitudenspektrum*. Dies stellt die auftretenden Amplituden in Abhängigkeit zur Kreisfrequenz dar.



Beispiel 5.3.4. Zu bestimmen ist das Amplitudenspektrum der Fourier-Reihe zur Funktion

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , -\pi < t \leq 0 \\ t & , 0 < t \leq \pi \end{cases}$$

Die Periodendauer beträgt $T = 2\pi$, woraus $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 1$ folgt. Wieder berechnen wir zuerst die komplexe Darstellung.

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} t \cdot e^{-int} dt$$

Mit partieller Integration erhalten wir

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \left(t \cdot \frac{e^{-int}}{-in} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{e^{-int}}{-in} dt \right) = \frac{1}{2\pi} \left(\pi \frac{e^{-in\pi}}{-in} - 0 - \left[\frac{e^{-int}}{-n^2} \right]_0^{\pi} \right)$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \left(\pi \frac{e^{-in\pi}}{-in} + \frac{e^{-in\pi}}{n^2} - \frac{1}{n^2} \right) = \frac{1}{2\pi} \left(\pi \frac{i \cdot e^{-in\pi}}{n} + \frac{e^{-in\pi}}{n^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

Der Fall $n = 0$ muss wieder extra berechnet werden:

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} t dt = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\pi^2}{2} - 0 \right) = \frac{\pi}{4}$$

Für $n \neq 0$ nimmt der Term $e^{-in\pi}$ in c_n abwechselnd die Werte ± 1 an. In einer geschlossenen Formel ausgedrückt bedeutet dies

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \left(\pi \frac{i \cdot (-1)^n}{n} + \frac{(-1)^n}{n^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

Die reellen Fourier-Koeffizienten lauten

$$a_0 = 2c_0 = \frac{\pi}{2}$$

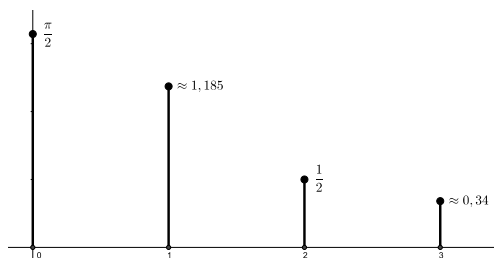
$$a_n = c_n + \bar{c}_n = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}$$

$$b_n = i(c_n - \bar{c}_n) = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Hier verschwinden keine Koeffizienten, in das Amplitudenspektrum fließen a_n und b_n ein. Es gilt der Zusammenhang

$$A_n = 2|c_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

für die Amplituden A_n . Das Ergebnis für die ersten vier Amplituden ist unten abgebildet.



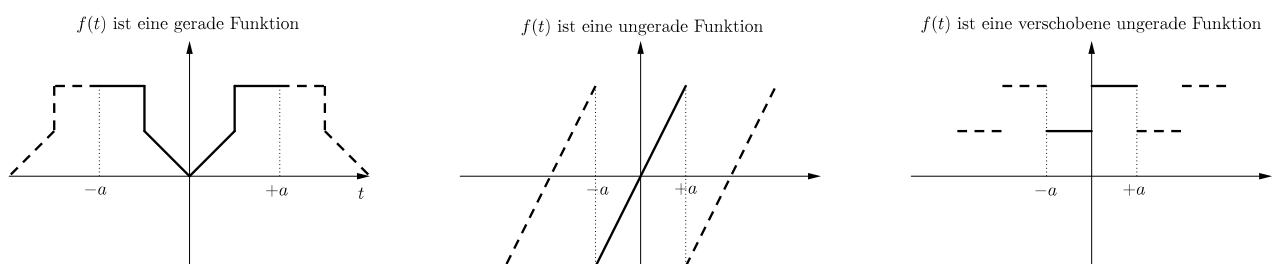
5.4 FMM - Frequently made mistakes

Stehen einmal die Gleichungen zur Berechnung der Fourier-Reihe zur Verfügung, so läuft die Berechnung auf das Einsetzen in Formeln hinaus. Trotzdem passieren erfahrungsgemäß immer wieder die gleichen Fehler, auf die in diesem Abschnitt noch einmal explizit hingewiesen werden soll.

5.4.1 Ausnutzen der Symmetrie

Sehr viele Funktionen sind in irgendeiner Form symmetrisch. Hier kann fast der halbe Rechenaufwand gespart werden, wenn die vorhandene Symmetrie erkannt und verwendet wird.

Für gerade Funktionen gilt $b_n = 0$, für (verschobene) ungerade Funktionen $a_n = 0$. Bevor man zu rechnen beginnt, sollte immer eine Überprüfung auf Symmetrie erfolgen.

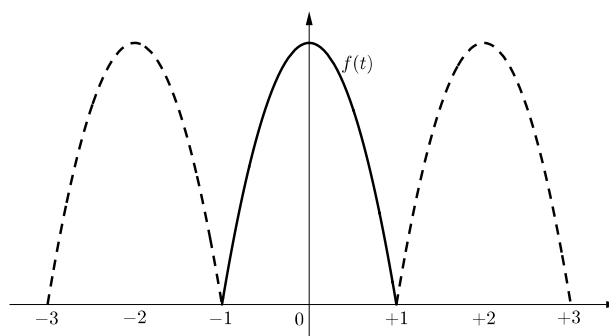


5.4.2 Gültigkeitsbereich der gegebenen Funktion

Für die Koeffizienten der Fourier-Reihe muss über ein (beliebiges) Intervall der Periodenlänge T integriert werden. Ja, das Intervall ist frei wählbar und nein, das bedeutet nicht stur die gegebene Funktion einzusetzen. Der wohl häufigste Fehler soll mit einem Beispiel noch einmal beleuchtet werden.

Wir suchen die Fourier-Reihe der 2-periodischen Funktion

$$f(t) = -3t^2 + 3 \text{ für } t \in [-1; +1]$$



Richtige Lösungen:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$b_n = 0$$

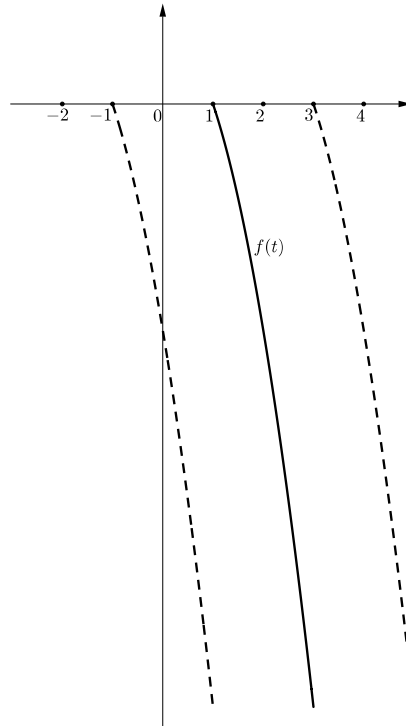
$$a_n = \frac{2}{2} \int_{-1}^1 (-3t^2 + 3) \cdot \cos(n\pi t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{2} \int_1^3 -3(x-1)(x-3) \cdot \cos(n\pi t) dt$$

Falsche „Lösungen“:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi \qquad b_n = 0 \qquad a_n = \frac{2}{2} \int_1^3 (-3t^2 + 3) \cdot \cos(n\pi t) dt$$

Die angegebene falsche Berechnung würde die Fourierreihe der unten abgebildeten Funktion bestimmen.



Wenn nicht über das Intervall integriert wird, auf dem der Funktionsterm definiert ist, so muss ein neuer Funktionsterm ermittelt werden.

5.5 Fourierreihen unter der Lupe

Gehen wir noch einmal an den Anfang des Kapitels zurück. Wir haben die Formeln für die Koeffizienten a_0 , a_n und b_n durch geschickte Manipulation der Ausgangsgleichung

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 x) + b_n \sin(n\omega_0 x))$$

sowie anschließender gliedweiser Integration erhalten. Unser Glück war, dass fast alle Integrale den Wert 0 ergeben haben. Dadurch konnten wir die Koeffizienten bestimmen. Aber war es wirklich nur Glück? Wohl kaum, es steckt tatsächlich eine Erklärung dahinter, die wir jetzt ein wenig beleuchten werden.

Zuerst müssen wir uns einmal klar machen, was unser eigentliches Ziel ist. Grob gesagt soll eine periodische Funktion $f(x)$ durch ein trigonometrisches Polynom $p(x)$ approximiert werden. Um aber von einer guten Näherung sprechen zu können, brauchen wir zuerst einen Abstands begriff, also eine *Metrik*. Eine Metrik erhalten wir auf natürliche Weise, wenn wir uns in einem Vektorraum mit Skalarprodukt befinden, denn dieses liefert eine *Norm* $\|\cdot\|$ und die Norm wiederum eine Metrik $d(\cdot, \cdot)$.

Es hat historisch einige Zeit gedauert, bis der richtige Rahmen für eine befriedigende Theorie gefunden werden konnte. Wir können an dieser Stelle auch nicht auf alle Aspekte eingehen, sondern kommen auf die wesentlichen Punkte zu sprechen.

Unter einem trigonometrischen Polynom $p(x)$ verstehen wir eine Funktion der Form

$$p(x) = \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ x \mapsto \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} \end{cases}$$

mit im allgemeinen komplexen Koeffizienten c_k .⁴

Die Menge aller trigonometrischer Polynome bezeichnen wir mit \mathcal{T} . Diese Menge kann mit den üblichen Rechenoperationen zu einem Vektorraum gemacht werden. Eine Basis dieses Vektorraum bilden z.B. die trigonometrischen Monome

$$B = \{e^{ikx} : k \in \mathbb{Z}\}$$

Das ist auch leicht einzusehen, denn wir haben ein trigonometrisches Polynom genau als Linearkombination dieser Monome definiert. Möchten wir uns nur auf trigonometrische Polynome vom Grad n einschränken, so notieren wir den Raum mit \mathcal{T}_n .

Jetzt brauchen wir noch ein Skalarprodukt für unseren Vektorraum. Einen passenden Kandidaten haben wir schon in der Vorlesung Mathematik 1 kennengelernt, es lautet

$$\langle p, q \rangle := \int_0^{2\pi} p(x) \overline{q(x)} dx$$

Hier wird im Integranden das Produkt von $p(x)$ und der komplexen Konjugation von $q(x)$ gebildet. Es ist nicht offensichtlich dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ wirklich ein Skalarprodukt ist, wir werden aber keinen Beweis dafür angeben. Wesentlich im Beweis ist die Stetigkeit der trigonometrischen Polynome, sowie deren Periodendauer von 2π . Es wäre daher durchaus möglich gewesen das Integral von $-\pi$ bis $+\pi$ auszuwerten. Eine bedeutsame Erkenntnis ist nun die Art und Weise, wie das Skalarprodukt auf unsere Basisfunktionen wirkt.

$$\langle e^{ikx}, e^{imx} \rangle = \int_0^{2\pi} e^{ikx} \overline{e^{imx}} dx = \int_0^{2\pi} e^{ikx} e^{-imx} dx = \int_0^{2\pi} e^{i(k-m)x} dx = \begin{cases} 2\pi - 0 = 2\pi & , k = m \\ 1 - 1 = 0 & , k \neq m \end{cases}$$

⁴In unseren Anwendungen werden sie durchgehend reell sein, da wir auch nur reelle Funktionen betrachten.

Hier wurde verwendet, dass $(k - m)2\pi$ ein ganzzahliges Vielfaches von 2π ist und die Exponentialfunktion komplexe Periode $2\pi i$ hat.

Wir haben damit nachgerechnet, dass die Basisvektoren e^{ikx} orthogonal zueinander stehen. Wir erhalten durch Normierung sogar eine Orthonormalbasis von \mathcal{T} mit den Basisvektoren

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \quad , k \in \mathbb{Z}$$

Bemerkung 5.5.1. Für die reelle Darstellung der trigonometrischen Polynome besteht die Orthonormalbasis aus den Vektoren

$$\sqrt{\frac{1}{\pi}} \sin(kt) \quad \text{und} \quad \sqrt{\frac{1}{\pi}} \cos(kt) \quad , k \in \mathbb{N}$$

Mit dem gegebenen Skalarprodukt ist natürlich auch wieder eine Norm verbunden. Sie heißt L^2 -Norm und ist durch die Gleichung

$$\|p\|_{L^2} := \sqrt{\langle p, p \rangle} = \left(\int_0^{2\pi} |p(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

definiert. Die Norm liefert uns wiederum einen natürlichen Abstandsbegriff

$$d(p; q)_{L^2} = \|p - q\|_{L^2} = \left(\int_0^{2\pi} |p(x) - q(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Dieser Abstand (Metrik) wird der *Abstand im quadratischen Mittel* genannt. Es handelt sich dabei um einen relativ schwachen Abstandsbegriff wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 5.5.2. Wir berechnen den L^2 -Abstand der Funktionen

$$f(x) = 1 \quad , x \in [0; 1]$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < \frac{1}{4} \\ 0 & x = \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{4} < x < \frac{1}{2} \\ -1 & x = \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

auf dem Intervall $[0; 1]$. Die Funktionen unterscheiden sich offensichtlich an den Stellen $x = \frac{1}{4}$ und $x = \frac{1}{2}$, jedoch gar nicht im Sinn des L^2 -Abstandes. Es gilt

$$\begin{aligned} \|f - g\|_{L^2} &= \left(\int_0^1 |f(x) - g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_0^{\frac{1}{4}} |1 - 1|^2 dx + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} |1 - 0|^2 dx + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} |1 - 1|^2 dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |1 - (-1)|^2 dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 |1 - 1|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= (0 + 0 + 0 + 0 + 0)^{\frac{1}{2}} = 0 \end{aligned}$$

Die Funktionen haben in der L^2 -Metrik den Abstand 0, unterscheiden sich also gar nicht. Wir hätten sogar noch viel mehr Stellen ändern können und immer noch keinen Unterschied berech-

net. Die Ursache liegt darin begründet, dass ein einzelner Wert nichts zum Integral beiträgt.

Um den Abstand zwischen einer Funktion f und einem trigonometrischen Polynom p berechnen zu können, muss das oben definierte Integral existieren. Dies führt zu einem der wichtigsten Vektorräume überhaupt, dem Raum der *quadratintegrierbaren Funktionen*. Wir betrachten zuerst die Menge

$$L_*^2(0; 2\pi) = \left\{ f: (0; 2\pi) \rightarrow \mathbb{C}: \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

Es besteht noch ein Problem mit dieser Menge, die L^2 -Norm ist hier nämlich gar keine richtige Norm. Als Norm müsste sie das Axiom der Definitheit

$$\|f - g\| = 0 \implies f - g = 0 \implies f = g$$

erfüllen. Das gerade betrachtete Beispiel 5.5.2 zeigt jedoch die Ungültigkeit dieser Forderung. Die rein mathematische Lösung ist sehr technisch, wir begnügen uns mit der Vorstellung, dass einfach alle Funktionen, die sich nicht "im Wesentlichen" unterscheiden, zu einer einzigen Funktion zusammengefasst werden. Haben also zwei Funktionen im quadratischen Mittel den Abstand 0, d.h. $\|f - g\|_{L^2} = 0$ so handelt es sich für uns um dieselbe Funktion. Die beiden Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ aus Beispiel 5.5.2 sind in diesem Sinn also tatsächlich identisch.

Jetzt können wir den Vektorraum der quadratintegrierbaren Funktionen definieren.

Definition 5.5.3. Der Raum $L^2(0; 2\pi)$ der *quadratintegrierbaren Funktionen* auf dem Intervall $(0; 2\pi)$ ist definiert als

$$L^2(0; 2\pi) = \left\{ f: (0; 2\pi) \rightarrow \mathbb{C}: \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

Die Elemente dieses Raums werden identifiziert, wenn sie sich nur auf einer Nullmenge⁵ unterscheiden.

Einige wichtige Funktionenräume lassen sich als Unterräume im $L^2(0; 2\pi)$ wiederfinden, es gilt z.B.

$$C([0; 2\pi]) \subseteq L^2(0; 2\pi) \quad \text{und} \quad \mathcal{T}_n \subseteq L^2(0; 2\pi) \quad , n \in \mathbb{N}$$

Stetige Funktionen und trigonometrische Polynome sind also im Intervall $[0; 2\pi]$ quadratintegrierbar.

Wir sind nun in der Lage den Abstand zwischen trigonometrischen Polynomen und beliebigen Funktionen f des Raums L^2 zu messen. Wie finden wir jetzt zu einer uns vorgelegten Funktion f das *optimalste* trigonometrische Näherungspolynom p ? Optimal ist es natürlich dann, wenn es zu f minimalen Abstand hat.

Wir nehmen uns ein beliebiges trigonometrisches Polynom $p = \sum_{k=-n}^n q_k \varphi_k \in \mathcal{T}_n$ mit $q_k \in \mathbb{C}$ her und berechnen den Abstand zur Funktion $f \in L^2(0; 2\pi)$. Die etwas mühsame Rechnerei ersparen wir uns hier und betrachten nur das Endergebnis.

$$\|f - p\|_{L^2}^2 = \langle f - p, f - p \rangle = \dots = \|f\|_{L^2}^2 - \sum_{k=-n}^n |\langle f, \varphi_k \rangle|^2 + \sum_{k=-n}^n |q_k - \langle f, \varphi_k \rangle|^2$$

Die ersten beiden Terme auf der rechten Seite der Gleichung haben gar nichts mit p zu tun, sie sind also unabhängig davon wie wir p wählen. Der letzte Term beinhaltet die Koeffizienten q_k und hängt

⁵Dazu gehören immer alle endlichen und abzählbar unendlichen Mengen. Weiter kann hier nicht auf den Begriff eingegangen werden.

somit von unserer Wahl p ab. Er ist eine Summe positiver Zahlen und somit ist klar, dass der Abstand genau dann minimal wird, wenn dieser letzte Term verschwindet. Es muss also gelten

$$q_k - \langle f, \varphi_k \rangle = 0 \implies q_k = \langle f, \varphi_k \rangle, \quad k = -n \dots n$$

Das Polynom p ist dann optimal gewählt, wenn die Koeffizienten durch die Skalarprodukte $\langle f, \varphi_k \rangle$ berechnet werden. Das Skalarprodukt im L^2 war aber nichts anderes als das Integral $\int_0^{2\pi} f \overline{\varphi_k} dx$:

$$q_k = \langle f, \varphi_k \rangle = \int_0^{2\pi} f(x) \overline{\varphi_k(x)} dx = \int_0^{2\pi} f(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx$$

Zusammengefasst erhalten wir die Bestapproximation an die Funktion f wenn wir das Polynom

$$p_n(x) = \sum_{k=-n}^n q_k \varphi_k = \sum_{k=-n}^n q_k \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}}_{=: c_k} e^{ikx}$$

berechnen, wobei

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx$$

gilt.

Damit haben wir die Formel für komplexe Fourierkoeffizienten noch einmal erhalten und bestätigt. *Fourierpolynome* erkennen wir somit als die besten Approximationen aus \mathcal{T}_n an Funktionen $f \in L^2$, im Sinne des quadratischen Mittels.

Möchte man den Übergang vom Fourierpolynom zur Fourierreihe machen, so muss geklärt werden, in welchem Sinn die Konvergenz der Reihe zu verstehen ist. Der natürliche Rahmen ist hier zuerst wieder die L^2 -Konvergenz im quadratischen Mittel. Es gilt der Satz

Satz 5.5.4. *Die Folge (p_n) der Fourierpolynome zu einer Funktion $f \in L^2(0; 2\pi)$ konvergiert im quadratischen Mittel gegen f , d.h.*

$$\int_0^{2\pi} |p_n(x) - f(x)|^2 dx \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

Die in diesem Sinn konvergente Reihe

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{-ikx}$$

heißt *Fourierreihe* von f .

Man erhält stärkere Konvergenzaussagen wenn die betrachtete Funktion f zusätzliche Eigenschaften aufweist. Für stückweise stetig differenzierbare Funktionen konvergiert die Fourierreihe auch *punktweise*. An dieser Stelle soll jedoch nicht weiter auf die noch sehr reichhaltige Theorie eingegangen werden.

Der abstrakte Zugang über das Approximationsproblem in Vektorräumen fällt naturgemäß schwerer als das Ausrechnen bestimmter Integrale. Er lässt aber auch viel tiefer blicken und erlaubt uns ein weit umfassenderes Verständnis wie verschiedene Dinge zueinander passen. Integrale fallen nicht einfach so vom Himmel, sondern kommen ganz natürlich als Skalarprodukt ins Spiel. Polynome und Potenzreihen nähern sich nicht zufällig Funktionen an, nein sie sind Lösungen eines Optimierungsproblems. Sie wurden gerade so gewählt, dass sie die bestmögliche Approximationseigenschaft haben.

6 Fourier-Transformation

6.1 Grundlagen

Im Kapitel über Fourier-Reihen haben wir festgestellt, dass unter gewissen Voraussetzungen (vgl. Satz 5.2.1) eine Funktion $f(t)$ als Überlagerung harmonischer Schwingungen dargestellt werden kann.

Die auftretenden Kreisfrequenzen ω_n sind ganzzahlige Vielfache der Grundkreisfrequenz ω_0 . Wir bezeichnen ω_0 als Kreisfrequenz der *Grundschiwingung* und die $\omega_n = n \cdot \omega_0$ als Kreisfrequenzen der *Oberschwingungen*. Die Darstellung lautet dann

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(n\omega_0 t) + b_n \cdot \sin(n\omega_0 t))$$

Die *Beträge* der Fourier-Koeffizienten haben wir schon früher als Schwingungsamplituden interpretiert. Sie legen den Anteil fest, mit dem die einzelnen Schwingungen an der Überlagerung beteiligt sind. Das Amplitudenspektrum ist dabei stets diskret (Linienspektrum).

Wir haben bereits gesehen, dass nicht nur 2π -periodische Funktionen in Fourier-Reihen entwickelt werden können, sondern beliebig periodische Funktionen (unter bereits genannten Bedingungen) eine solche Reihendarstellung besitzen.

Eine weitere Verallgemeinerung liegt in der Frage, ob die Periodizität nicht zur Gänze weggelassen werden kann. Die Idee besteht darin, die Größe des Periodenintervalls immer stärker wachsen zu lassen, bis es schließlich im Grenzübergang unendlich groß wird. Es wird sich im folgenden Abschnitt tatsächlich herausstellen, dass eine solche Entwicklung nichtperiodischer Funktionen (unter gewissen Voraussetzungen) möglich ist.

Gehen wir von einer periodischen Funktion mit komplexer Darstellung aus.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{in\omega_0 t}$$

Wir erinnern uns an die Zusammenhänge der Periodendauer $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ und der Kreisfrequenzen $\omega_n = n \cdot \omega_0$. Lassen wir $T \rightarrow \infty$ streben, so strebt $\omega_0 \rightarrow 0$. Das bedeutet wiederum, dass der Abstand zweier benachbarter Kreisfrequenzen ebenfalls verschwindet, denn

$$\Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n = (n+1)\omega_0 - n\omega_0 = \omega_0 \rightarrow 0$$

Als Konsequenz dessen müssen wir feststellen, dass es nicht mehr reicht, über alle diskreten Kreisfrequenzen zu summieren. Es muss das *kontinuierliche* Kreisfrequenzspektrum $\omega \in (-\infty; +\infty)$ berücksichtigt werden, wenn die Funktion nicht mehr periodisch ist.

Die Darstellung der Fourier-Reihe ändert sich dementsprechend zu einer Integraldarstellung, genauer gilt die Formel

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega \quad (6.1)$$

Die Zerlegung der nichtperiodischen Funktion $f(t)$ wird *eindeutig* durch die frequenzabhängige Funktion $F(\omega)$ beschrieben.

Definition 6.1.1. Die Funktion

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt \quad (6.2)$$

heißt die *Fourier-Transformierte* oder *Bildfunktion* der Funktion $f(t)$, sofern das uneigentliche Integral existiert. Wir verwenden die symbolische Schreibweise

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$$

Bemerkung 6.1.2. Die Fourier-Transformierte $F(\omega)$ einer Funktion $f(t)$ für die $\int |f(t)| < \infty$ gilt, ist eine i.Allg. komplexwertige, stetige Funktion der reellen Variablen ω und verschwindet im Unendlichen, d.h. es gilt $\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} F(\omega) = 0$.

Ist $f(t)$ eine reelle Funktion (wie häufig in Anwendungen), dann gilt die Gleichung $F(-\omega) = \overline{F(\omega)}$.

Bemerkung 6.1.3. Wir verwenden folgende Bezeichnungen:

$f(t)$	Originalfunktion
$F(\omega)$	Bildfunktion, Fourier-Transformierte, Spektrum von $f(t)$
\mathcal{F}	Fourier-Transformationsoperator

Es ist eine entscheidende Tatsache, dass $f(t)$ und $\mathcal{F}\{f\}$ eindeutig zuordenbar sind. Es hat sich bewährt diese Korrespondenz durch die symbolische Schreibweise¹

$$f(t) \circ \bullet F(\omega)$$

darzustellen. Mathematisch haben die Variablen t und ω keine weitere Interpretation, in technischen Problemstellungen treten manche Anwendungsfälle aber deutlich häufiger auf als andere. Darum werden den Variablen häufig physikalische Bedeutungen zugewiesen.

Die Originalfunktionen $f(t)$ heißen meistens *Zeitfunktionen*, die zugehörigen Bildfunktionen $F(\omega)$ *Frequenzfunktionen*. Es handelt sich also um Fourier-Transformationen aus dem Zeitbereich in den Frequenzbereich. Von besonderem Interesse sind Betrag und Argument der Bildfunktion $F(\omega)$.

$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$	Spektrum von $f(t)$
$A(\omega) = F(\omega) $	Amplitudenspektrum
$\varphi(\omega) = \text{Arg}(F(\omega))$	Phasenspektrum

Mit diesen Größen lässt sich die Bildfunktion auch in der Form

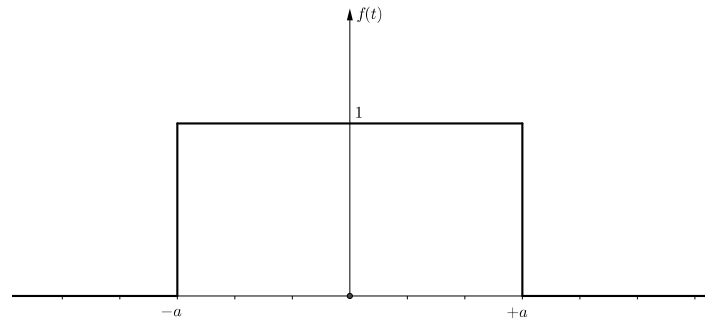
$$F(\omega) = |F(\omega)| \cdot e^{i\varphi(\omega)} = A(\omega) \cdot e^{i\varphi(\omega)}$$

darstellen.

Beispiel 6.1.4. Wir bestimmen die Fourier-Transformierte eines rechteckigen Impulses mit der Gleichung

$$f(t) = \begin{cases} 1 & , |t| \leq a \\ 0 & , |t| > a \end{cases}$$

¹Das Symbol $\circ \bullet$ wird auch *Doetsch-Symbol* genannt, nach *Gustav Heinrich Adolf Doetsch (1892-1977)*.



$$\begin{aligned}
 F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt = \int_{-a}^{+a} \mathbf{1} \cdot e^{-i\omega t} dt = \left[\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} \right]_{-a}^{+a} \\
 &= -\frac{1}{i\omega} [e^{-i\omega t}]_{-a}^{+a} = \frac{1}{i\omega} (e^{i a \omega} - e^{-i a \omega}) = \\
 &= \frac{2i \cdot \sin(a\omega)}{i\omega} = \frac{2 \sin(a\omega)}{\omega}
 \end{aligned}$$

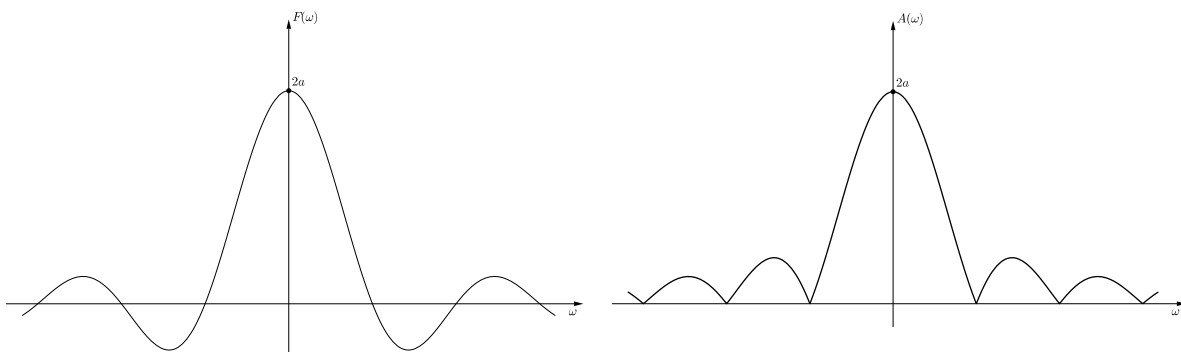
Für $\omega = 0$ ist der Ausdruck nicht definiert, wir berechnen den Fall $\omega = 0$ extra:

$$F(\omega = 0) = \int_{-a}^{+a} \mathbf{1} dt = a - (-a) = 2a$$

Insgesamt erhalten wir als Fourier-Transformierte des Rechteckimpulses

$$F(\omega) = \begin{cases} \frac{2 \cdot \sin(a\omega)}{\omega} & , \omega \neq 0 \\ 2a & , \omega = 0 \end{cases}$$

Trotz der Fallunterscheidung handelt es sich hierbei um eine stetige Funktion. Die nachfolgenden Abbildungen zeigen die Bildfunktion $F(\omega)$ und das Amplitudenspektrum $A(\omega)$.



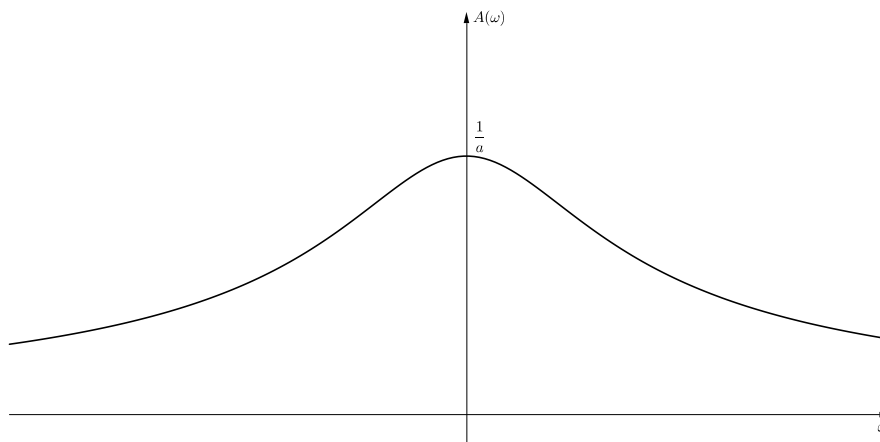
Beispiel 6.1.5. Wir bestimmen die Fourier-Transformierte der Funktion

$$f(t) = \begin{cases} e^{-at} & , t \geq 0 \quad (a > 0) \\ 0 & , t < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_0^{\infty} e^{-at} \cdot e^{-i\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+i\omega)t} dt = \left[\frac{e^{-(a+i\omega)t}}{-a-i\omega} \right]_0^{\infty} \\ &= -\frac{1}{a+i\omega} \left[e^{-(a+i\omega)t} \right]_0^{\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{a+i\omega} \cdot 1 \right) \\ &= \frac{1}{a+i\omega} \end{aligned}$$

Für das Amplitudenspektrum erhalten wir den Ausdruck

$$A(\omega) = |F(\omega)| = \left| \frac{1}{a+i\omega} \right| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}$$



6.2 Inverse Fourier-Transformation

Für die Rücktransformation aus dem Bild- in den Originalbereich werden die Schreibweisen

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = f(t) \quad \text{oder} \quad F(\omega) \bullet \longrightarrow f(t)$$

verwendet. Theoretisch wird die Rücktransformation über das schon vorgestellte Integral (6.1) bewerkstelligt.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega$$

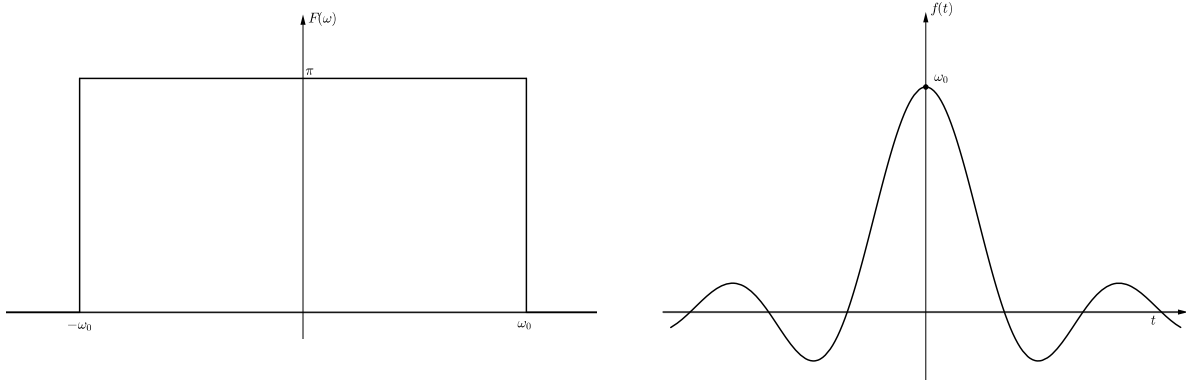
In der Praxis werden meist fertige Tabellen für die Rücktransformation verwendet, da dieses Integral oft nur unter erheblichem Rechenaufwand lösbar ist.

Beispiel 6.2.1. Gegeben sei die folgende Bildfunktion

$$F(\omega) = \begin{cases} \pi & , |\omega| \leq \omega_0 \\ 0 & , |\omega| > \omega_0 \end{cases}$$

Die Integration ist elementar durchführbar:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \pi \cdot e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{e^{i\omega t}}{it} \right]_{-\omega_0}^{\omega_0} = \frac{1}{2it} (e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}) \\ &= \frac{2i \cdot \sin(\omega_0 t)}{2it} = \frac{\sin(\omega_0 t)}{t} \end{aligned}$$



6.3 Zusammenhang reeller und komplexer Darstellung

Eine nichtperiodische Funktion $f(t)$ lässt sich (falls transformierbar) in der reellen Form

$$f(t) = \int_0^{\infty} (a(\omega) \cos(\omega t) + b(\omega) \sin(\omega t)) d\omega$$

darstellen. Die Koeffizienten $a(\omega)$ und $b(\omega)$ (*Spektralfunktionen*) werden über die Integrale

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \cos(\omega t) dt$$

$$b(\omega) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \sin(\omega t) dt$$

bestimmt. Zwischen der komplexen Darstellung

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega$$

und der reellen Darstellung

$$f(t) = \int_0^{\infty} (a(\omega) \cos(\omega t) + b(\omega) \sin(\omega t)) d\omega$$

besteht der folgende Zusammenhang:

$$F(\omega) = \pi (a(\omega) - i \cdot b(\omega))$$

$$A(\omega) = |F(\omega)| = \pi \cdot \sqrt{a(\omega)^2 + b(\omega)^2}$$

6.4 Wichtige verallgemeinerte Funktionen

In diesem Abschnitt lernen wir drei grundlegende “Funktionen“ kennen, die eine prominente Rolle in vielen Anwendungen spielen. Da es sich bei der letzten Funktion gar nicht um eine echte Funktion im klassischen Sinn handelt, spricht man in diesem Fall von einer *verallgemeinerten Funktion*.

6.4.1 Die Sigmafunktion $\sigma(t)$

Diese Sprungfunktion hat eine einfache Definition und ist auch eine ganz klassische Funktion.

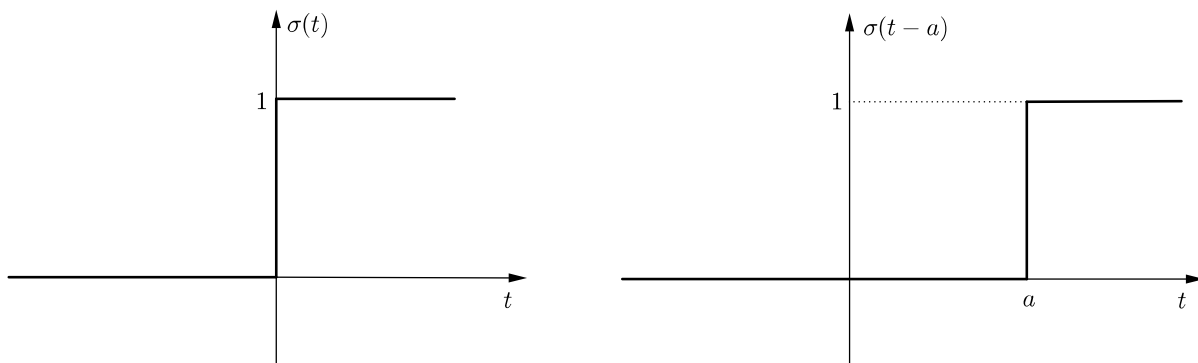
Definition 6.4.1. Die *Sigmafunktion*² $\sigma(t)$ ist definiert als

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ 1 & , t \geq 0 \end{cases}$$

und springt bei $t = 0$ auf Höhe 1. Die *verschobene Sigmafunktion* $\sigma(t - a)$ mit $a \in \mathbb{R}$

$$\sigma(t - a) = \begin{cases} 0 & , t < a \\ 1 & , t \geq a \end{cases}$$

hat ihre Sprungstelle bei $t = a$.



Die Funktion $\sigma(t)$ wirkt recht unscheinbar, doch lassen sich mit ihr wichtige Effekte erzielen, z.B. das sogenannte *Ausblenden*.

Beispiel 6.4.2. Gegeben sei die Funktion $f(t)$ mit $D = \mathbb{R}$. Diese Funktion soll jetzt bis zum Zeitpunkt $t = a$ ausgeblendet werden (Null sein) und erst ab diesem Zeitpunkt auftauchen. Mit der (verschobenen) Sigmafunktion lässt sich dieses Verhalten elegant beschreiben.

Wir definieren die neue Funktion $g(t)$ durch

$$g(t) := f(t) \cdot \sigma(t - a)$$

Wir betrachten zwei Fälle:

1. Fall, $t < a$:

$$g(t) = f(t) \cdot \underbrace{\sigma(t - a)}_{<0} = f(t) \cdot 0 = 0$$

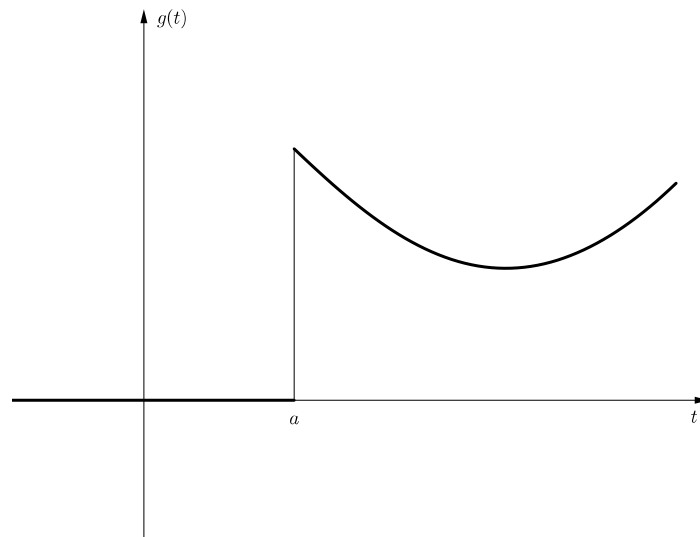
2. Fall, $t \geq a$:

$$g(t) = f(t) \cdot \underbrace{\sigma(t - a)}_{>0} = f(t) \cdot 1 = f(t)$$

²Auch *Heaviside-Funktion* genannt.

Unsere neu definierte Funktion $g(t)$ hat somit die Darstellung

$$g(t) = \begin{cases} 0 & , t < a \\ f(t) & , t \geq a \end{cases}$$



Somit haben wir alle Werte links von a ausgeblendet.

Soll eine Funktion nur in einem bestimmten Intervall $[a; b]$ mit $(a < b)$ sichtbar sein, so müssen wir noch den Bereich über b ausblenden. Wir definieren

$$g(t) := f(t) \cdot \sigma(t - a) - f(t) \cdot \sigma(t - b)$$

und betrachten diesmal drei Fälle:

1. Fall, $t < a < b$:

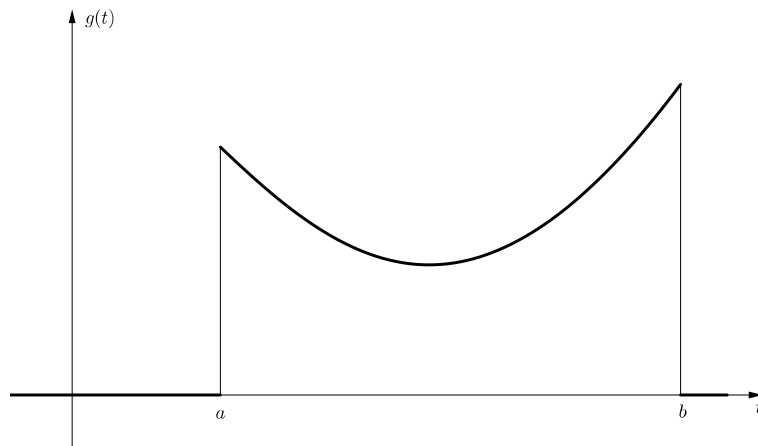
$$g(t) = f(t) \cdot \underbrace{\sigma(t - a)}_{<0} - f(t) \cdot \underbrace{\sigma(t - b)}_{<0} = f(t) \cdot 0 - f(t) \cdot 0 = 0$$

2. Fall, $a < t < b$:

$$g(t) = f(t) \cdot \underbrace{\sigma(t - a)}_{>0} - f(t) \cdot \underbrace{\sigma(t - b)}_{<0} = f(t) \cdot 1 - f(t) \cdot 0 = f(t)$$

3. Fall, $a < b < t$:

$$g(t) = f(t) \cdot \underbrace{\sigma(t - a)}_{>0} - f(t) \cdot \underbrace{\sigma(t - b)}_{>0} = f(t) \cdot 1 - f(t) \cdot 1 = f(t) - f(t) = 0$$



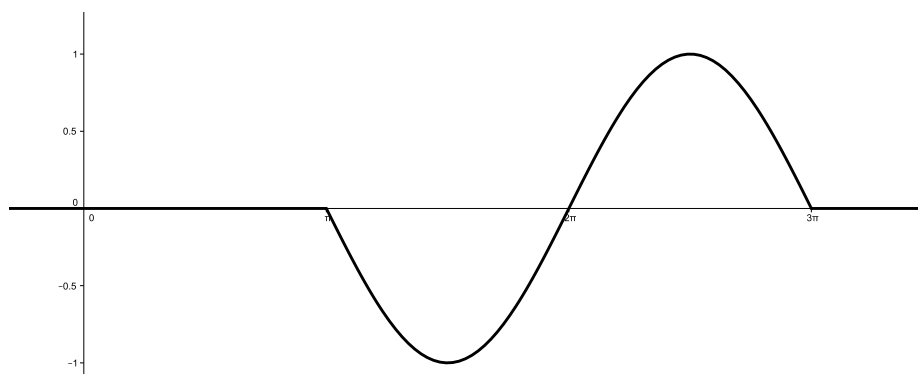
Beispiel 6.4.3. Die Funktion $f(t) = \sin(t)$ soll außerhalb des Zeitintervalls $[\pi; 3\pi]$ vollständig ausgeblendet werden.

Wir definieren die Funktion

$$g(t) = \sin(t) \cdot (\sigma(t - \pi) - \sigma(t - 3\pi))$$

die genau die gesuchten Eigenschaften aufweist.

$$g(t) = \begin{cases} \sin(t) & , t \in [\pi; 3\pi] \\ 0 & , t \notin [\pi; 3\pi] \end{cases}$$



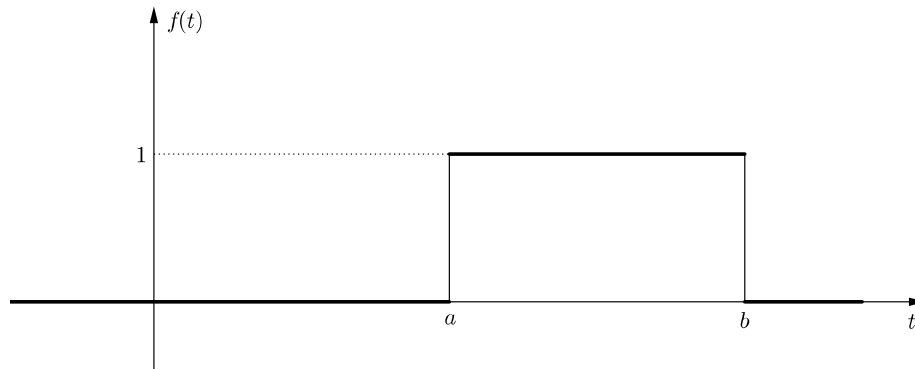
6.4.2 Rechteck-Impulse

Rechteckige Impulse spielen in der Elektro- und Regelungstechnik eine wesentliche Rolle. Sie lassen sich ganz einfach mit Hilfe der Sigmafunktion erzeugen.

Definition 6.4.4. Eine Funktion der Form

$$f(t) = \begin{cases} 1 & , t \in [a; b] \\ 0 & , t \notin [a; b] \end{cases}$$

bezeichnen wir als *Rechteckimpuls*.



Ein Rechteckimpuls $f(t)$ im Intervall $[a; b]$ lässt sich einfach mit der Sigmafunktion $\sigma(t)$ darstellen:

$$f(t) = \sigma(t - a) - \sigma(t - b)$$

Die Richtigkeit lässt sich wieder leicht über schon bekannte Fallunterscheidungen zeigen. Wir bestimmen noch seine Fourier-Transformierte.

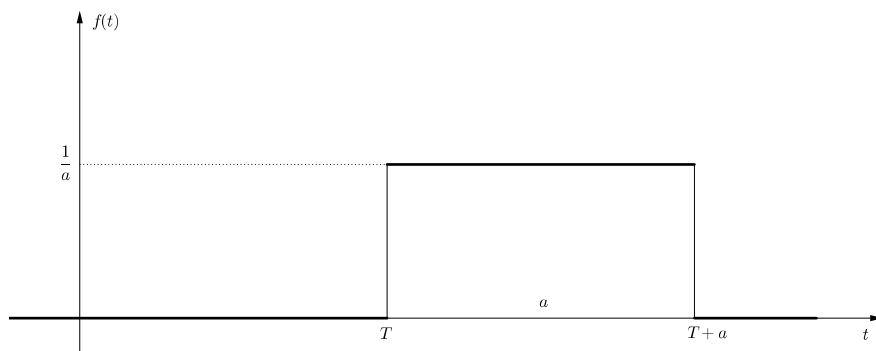
$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt = \int_a^b 1 \cdot e^{-i\omega t} dt = \left[\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} \right]_a^b \\ &= \frac{e^{ib\omega} - e^{-ia\omega}}{-i\omega} = \frac{i \cdot (e^{ib\omega} - e^{-ia\omega})}{\omega} = i \cdot \frac{e^{-ib\omega} - e^{-ia\omega}}{\omega} \end{aligned}$$

6.4.3 Die Diracsche Deltafunktion

Wir kommen jetzt zu jener Funktion die dafür verantwortlich zeichnet, dass dieser Abschnitt mit “verallgemeinerten“ Funktionen betitelt wurde. Die Sigma- und Rechtecksfunktion waren normale, ja sogar sehr einfache Funktionen. Der *Dirac-Impuls*³ gehört zu einer ganz anderen Art von Funktionen, im klassischen Sinne ist er nicht einmal eine.

Die Diracsche Deltafunktion (kurz δ -Funktion) modelliert einen extrem kurzen, dafür sehr starken Impuls, wie er bei Strom- oder mechanischen Stößen auftreten kann.

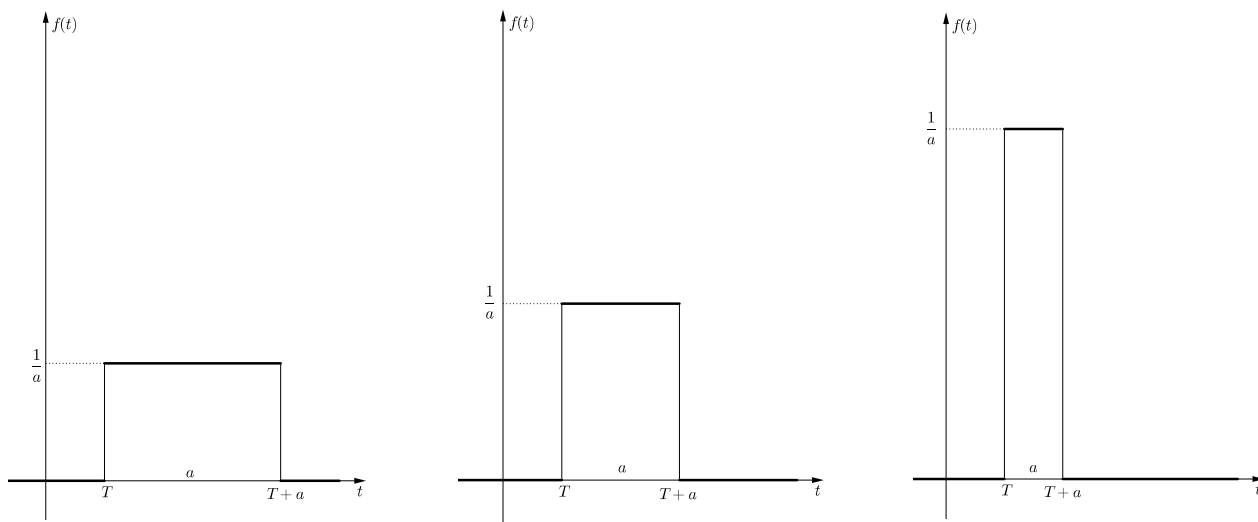
Wir beginnen mit einem einfachen Rechtecksimpuls der zum Zeitpunkt $t = T$ einsetzt und bei $t = T+a$ endet. Die Höhe des Impulses sei $\frac{1}{a}$.



Die Impulshöhe wurde so gewählt, um die *Impulsstärke* mit dem Wert $\frac{1}{a} \cdot a = 1$ festzulegen. Dies entspricht dem Flächeninhalt unter der Kurve.

³nach *Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984)* benannt.

Soll der Impuls bei gleichbleibender Stärke möglichst spontan erfolgen, muss die Breite a verkleinert und die Impulshöhe entsprechend erhöht werden.



Dirac betrachtete den Grenzfall $a \rightarrow 0$, der einem punktuellen Sprung an der Stelle T entspricht und forderte, dass die ‘‘Fläche‘‘ unter dem Impuls immer noch gleich 1 sein soll. Formal können wir die Definition seines Impulses schreiben als

$$\delta(t - T) = \begin{cases} 0 & , t \neq T \\ \infty & , t = T \end{cases}$$

wobei weiterhin die Gültigkeit des Integrals

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - T) dt = 1$$

gewährleistet werden soll.

Dirac forderte somit von seiner Funktion, sie dürfe nur noch an einem einzigen Punkt ungleich 0 sein, muss dort aber so stark gegen Unendlich ∞ streben, dass das Integral immer noch exakt 1 ergibt.

Dirac selbst war natürlich klar, dass seine Forderungen von einer üblichen Funktion unerfüllbar sind, ließ sich aber dennoch nicht von seiner Idee abbringen, da ihn die damit gewonnen Resultate und Ergebnisse überzeugten. Seine Methode funktionierte, doch noch wusste niemand wirklich warum eigentlich. Es war an den beiden großen Mathematikern *Sergei Sobolew*⁴ und *Laurent Schwartz*⁵, die das mathematische Fundament für Diracs Idee entwickelten. Heute spricht man von *verallgemeinerten Funktionen* oder *Distributionen*.

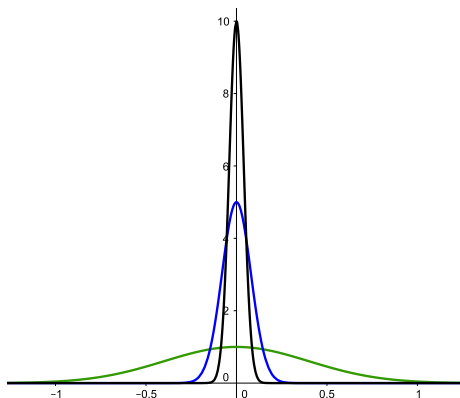
An dieser Stelle wollen wir die δ -Distribution auf ein festes Fundament stellen und sie nicht durch die oben vorgestellte Rechtecksfunktion approximieren, sondern durch den Grenzwert einer sogenannte *Dirac-Folge*

$$\delta(x) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi_{\varepsilon}(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} e^{-\frac{x^2}{\varepsilon}}$$

Die Sinnhaftigkeit dieser Definition werden wir jetzt überprüfen und auch die wichtigsten Eigenschaften herleiten. Ein Schaubild soll zumindest einen ersten optischen Eindruck von der gewünschten Form liefern.

⁴*Sergei Lwowitsch Sobolew (1908-1989)*

⁵*Laurent Schwartz (1915-2002)*



Für die Werte $\varepsilon \in \{\frac{1}{\pi}; \frac{1}{25\pi}; \frac{1}{100\pi}\}$ erhalten wir einen guten Eindruck des Funktionsverhaltens.

Wir fassen wichtige Eigenschaften der Deltafunktion zusammen.

Satz 6.4.5. *Es gelten die folgenden wichtigen Eigenschaften:*

a) *Normiertheit:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{\varepsilon}(x) dx = 1$$

b) *Für $x \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi_{\varepsilon}(x) = \begin{cases} 0 & , x \neq 0 \\ \infty & , x = 0 \end{cases}$$

c) *Ausblendeigenschaft:*

$$\int_a^b \delta(x - x_0) \cdot f(x) dx = \begin{cases} f(x_0) & , x_0 \in [a; b] \\ 0 & , x_0 \notin [a; b] \end{cases}$$

d) *Symmetrie:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) \cdot f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x_0 - x) \cdot f(x) dx$$

Beweis:

a) Einsetzen der Definition ergibt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} e^{-\frac{x^2}{\varepsilon}} dx$$

Wir substituieren $u = \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}$. Daraus erhalten wir $\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ und verwenden $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ aus Beispiel 2.1.10.

$$\frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \sqrt{\varepsilon} du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\pi} = 1$$

□

b) Wir setzen zuerst die Definition ein:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi_\varepsilon(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} e^{-\frac{x^2}{\varepsilon}}$$

Für $x = 0$ gilt $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} e^{-\frac{x^2}{\varepsilon}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} \rightarrow \infty$.

Es bleibt der Fall $x \neq 0$ zu prüfen. Das Ergebnis folgt durch Anwendung der Regel von De L'Hospital nach einer geeigneten Umformung:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} e^{-\frac{x^2}{\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon} e^{\frac{x^2}{\varepsilon}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon} e^{\frac{2x^2}{\varepsilon}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon e^{\frac{2x^2}{\varepsilon}}}}$$

Im letzten Schritt wurde die Stetigkeit der Wurzelfunktion verwendet. Wir berechnen diesen Grenzwert jetzt extra.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon e^{\frac{2x^2}{\varepsilon}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{2x^2}{\varepsilon}}}{\frac{1}{\varepsilon}} \rightsquigarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{2x^2}{\varepsilon}} \cdot (-2x^2)\varepsilon^{-2}}{-\varepsilon^{-2}} = \infty \quad (\text{für } x \neq 0)$$

Damit strebt der Nenner des ursprünglichen Grenzwerts gegen ∞ und der gesamte Ausdruck für $x \neq 0$ gegen 0.

□

c) Wir substituieren $u = \frac{x-x_0}{\sqrt{\varepsilon}}$ und erhalten $dx = \sqrt{\varepsilon} du$.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x_0) \cdot f(x) dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{\varepsilon}} \cdot f(x) dx \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} e^{-u^2} \cdot f(u\sqrt{\varepsilon} + x_0) \sqrt{\varepsilon} du \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \cdot f(u\sqrt{\varepsilon} + x_0) du \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} f(x_0) du = \frac{f(x_0)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{f(x_0)}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\pi} = f(x_0) \end{aligned}$$

Das Vertauschen von Grenzwert und Integral wurde nicht weiter begründet, war an dieser Stelle aber zulässig.

□

d) Die Symmetrie folgt direkt aus obigem Beweis, wenn in der Rechnung $x-x_0$ durch x_0-x ersetzt wird.

□

Beispiel 6.4.6. Wir werten die folgenden Integrale aus.

a)

$$\int_0^{2\pi} \delta(t-\pi) \cdot e^{-t} \cdot \cos(t) dt = e^{-\pi} \cdot \cos(\pi) = -e^{-\pi}$$

b)

$$\int_1^{\infty} \delta(t+5) \cdot \ln(t) dt = 0$$

Der Parameter $T = -5$ liegt außerhalb des Integrationsbereichs $[1; \infty)$.

c)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-T) \cdot \sigma(t-2\pi) \cdot \sin(t) dt \underset{T \in (-\infty; \infty)}{=} \sigma(T-2\pi) \cdot \sin(T) = \begin{cases} 0 & , T < 2\pi \\ \sin(T) & , T \geq 2\pi \end{cases}$$

Interessant gestaltet sich die Frage nach der Fourier-Transformierten der Deltafunktion. Wir können das dafür notwendige Integral wieder nicht *berechnen*, dennoch lässt es sich aber *auswerten*.

$$\mathcal{F}\{\delta(t-T)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-T) \cdot e^{-i\omega t} dt = e^{-i\omega T}$$

Wir fassen dieses Ergebnis mit unseren Korrespondenzsymbolen zusammen:

$$\mathcal{F}\{\delta(t-T)\} = e^{-i\omega T} \implies \delta(t-T) \circ \bullet e^{-i\omega T}$$

$$\mathcal{F}\{\delta(t+T)\} = e^{i\omega T} \implies \delta(t+T) \circ \bullet e^{i\omega T}$$

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = e^{-i\omega 0} \implies \delta(t) \circ \bullet 1$$

Bemerkung 6.4.7. Das Frequenzspektrum der Impulsfunktion $\delta(t)$ enthält somit alle Kreisfrequenzen zwischen $-\infty$ bis $+\infty$ mit **gleichem** Gewicht (die Amplitude ist gleich 1).

Die Deltafunktion entsteht durch Überlagerung von harmonischen Schwingungen **aller** Kreisfrequenzen mit gleicher Amplitude. Solch ein Spektrum wird auch als weißes Spektrum bezeichnet, in Analogie zum weißen Licht, das durch Überlagerung aller farbigen Lichtwellen entsteht.

6.4.4 Zusammenhang zwischen Deltafunktion und Sigmafunktion

Dieser kurze Abschnitt beleuchtet einen interessanten Zusammenhang zwischen den beiden wichtigen (verallgemeinerten) Funktionen $\delta(t-T)$ und $\sigma(t-T)$.

Wir betrachten die Auswirkung der *Ausblendeigenschaft* auf die konstante Funktion $f(t) = 1$, wobei wir von $-\infty$ bis t integrieren.

$$\int_{-\infty}^t \delta(u-T) \cdot 1 du = \begin{cases} 1 & , T \leq t \\ 0 & , T > t \end{cases}$$

Die rechte Seite der Gleichung ist genau die Definition der Sprungfunktion $\sigma(t-T)$, es gilt also

$$\int_{-\infty}^t \delta(u-T) du = \sigma(t-T)$$

Wenn wir die Deltafunktion als klassische Funktion betrachten, so bedeutet die letzte Gleichung nichts anderes, als dass $\sigma(t - T)$ eine *Stammfunktion* von $\delta(t - T)$ ist. Anders ausgedrückt könnten wir auch formulieren, dass die Deltafunktion der *Ableitung* der Sigmafunktion entspricht.

Da klassische Funktionen in ihren Sprungstellen jedoch nicht differenzierbar sind, muss natürlich auch ein neuer, *verallgemeinerter* Ableitungsbegriff definiert werden.

Definition 6.4.8. Die *verallgemeinerte Ableitung* einer Funktion $f(t)$ die an den Stellen $t = t_i$ Sprungstellen der Höhe a_i aufweist, sonst aber überall stetig differenzierbar ist, wird wie folgt definiert:

$$\frac{Df(t)}{Dt} := f'(t) + \sum_i a_i \cdot \delta(t - t_i) \quad (6.3)$$

Dabei bedeutet $f'(t)$ die klassische Ableitung.

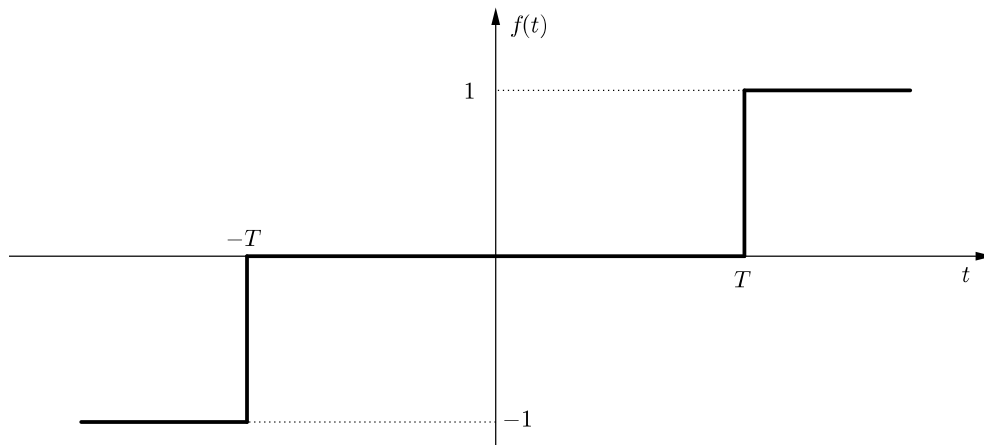
Wir können jetzt nachprüfen, ob diese Definition mit unserem vorangegangenen Ergebnis des Zusammenhangs zwischen $\delta(t - T)$ und $\sigma(t - T)$ zusammenpasst.

$$\frac{D\sigma(t - T)}{Dt} = \sigma'(t - T) + a \cdot \delta(t - T) = 0 + 1 \cdot \delta(t - T) = \delta(t - T)$$

Die Deltafunktion ist somit tatsächlich die verallgemeinerte Ableitung der Sigmafunktion.

Beispiel 6.4.9. Wir bestimmen die verallgemeinerte Ableitung einer Funktion mit zwei Sprungstellen.

$$f(t) = -1 + \sigma(t + T) + \sigma(t - T)$$



$$\frac{Df(t)}{Dt} = f'(t) + 1 \cdot \delta(t + T) + 1 \cdot \delta(t - T) = 0 + \delta(t + T) + \delta(t - T) = \delta(t + T) + \delta(t - T)$$

6.5 Transformationssätze

In diesem Abschnitt stellen wir zentrale Werkzeuge zusammen, die beim Arbeiten mit Fourier-Transformationen von großer Bedeutung sind. Wir verzichten dabei weitestgehend auf die Beweisführung um den Blick für das Wesentliche nicht zu verlieren.

Wir verwenden im weiteren Text die Schreibweise $\mathcal{F}\{f_i(t)\} = F_i(\omega)$.

6.5.1 Linearitätssatz

Merksatz: Es darf gliedweise transformiert werden, konstante Koeffizienten bleiben erhalten.

$$\mathcal{F}\{c_1 \cdot f_1(t) + \dots + c_n \cdot f_n(t)\} = c_1 \cdot F_1(\omega) + \dots + c_n \cdot F_n(\omega)$$

Beispiel 6.5.1.

$$f(t) = \pi \cdot e^{-t} \cdot \sigma(t) + 4 \cdot e^{-6t} \cdot \sigma(t)$$

Wir verwenden die Korrespondenzen^a

$$e^{-t} \cdot \sigma(t) \circ \bullet \frac{1}{1+i\omega} \quad \text{und} \quad e^{-6t} \cdot \sigma(t) \circ \bullet \frac{1}{6+i\omega}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(t)\} &= \mathcal{F}\{\pi \cdot e^{-t} \cdot \sigma(t) + 4 \cdot e^{-6t} \cdot \sigma(t)\} \\ &= \pi \cdot \mathcal{F}\{e^{-t} \cdot \sigma(t)\} + 4 \cdot \mathcal{F}\{e^{-6t} \cdot \sigma(t)\} \\ &= \pi \cdot \frac{1}{1+i\omega} + 4 \cdot \frac{1}{6+i\omega} = \frac{\pi(6+i\omega) + 4(1+i\omega)}{(1+i\omega)(6+i\omega)} \\ &= \frac{6\pi + 4 + i\omega(\pi + 4)}{6 + 7i\omega - \omega^2} \end{aligned}$$

^aDer Leser ist herzlich eingeladen diese *Einzeiler* selbst zu beweisen!

6.5.2 Ähnlichkeitssatz

Merksatz: Wird das Argument der Originalfunktion multipliziert, so wird bei der Bildfunktion dividiert.

$$\mathcal{F}\{f(a \cdot t)\} = \frac{1}{|a|} \cdot F\left(\frac{\omega}{a}\right), \quad (a \neq 0)$$

Beispiel 6.5.2.

$$f(t) = e^{-2|t|}$$

Wir verwenden die Korrespondenz

$$e^{-|t|} \circ \bullet \frac{2}{1+\omega^2}$$

$$\mathcal{F}\{e^{-2|t|}\} = \frac{1}{2} \cdot F\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1 + \left(\frac{\omega}{2}\right)^2} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{2}\right)^2} = \frac{4}{4 + \omega^2}$$

6.5.3 Verschiebungssatz

Merksatz: Wird vom Argument der Originalfunktion a subtrahiert, so wird die Bildfunktion mit dem Phasenfaktor $e^{-ia\omega}$ multipliziert.

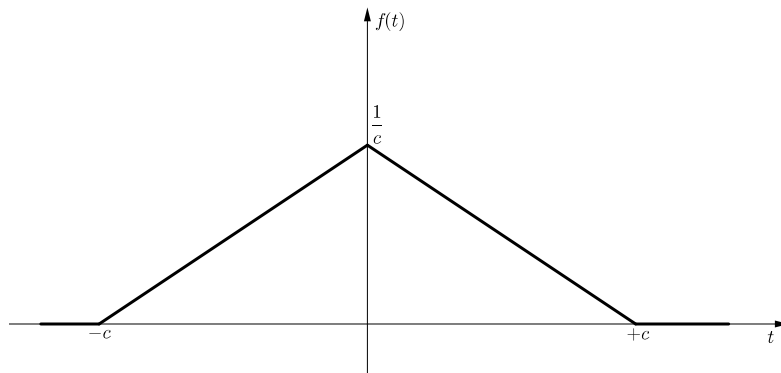
$$\mathcal{F}\{f(t - a)\} = e^{-ia\omega} \cdot F(\omega) \quad (a \in \mathbb{R})$$

Bei einer Verschiebung im Zeitbereich bleibt das Amplitudenspektrum $A(\omega) = |F(\omega)|$ erhalten, denn

$$|e^{-ia\omega} \cdot F(\omega)| = \underbrace{|e^{-ia\omega}|}_{=1} \cdot |F(\omega)| = |F(\omega)|$$

Beispiel 6.5.3.

Sei $f(t)$ mit $F(\omega) = \frac{2(1 - \cos(c\omega))}{c^2\omega^2}$ gegeben.



Wir berechnen die Bildfunktion von $g(t) = f(t - a)$.

$$G(\omega) = e^{-ia\omega} \cdot F(\omega) = \frac{2(1 - \cos(c\omega)) \cdot e^{-ia\omega}}{c^2\omega^2}$$

6.5.4 Dämpfungssatz

Merksatz: Einer Multiplikation im Zeitbereich mit $e^{i\omega_0 t}$ (Dämpfung) entspricht eine Frequenzverschiebung um ω_0 im Frequenzbereich⁶.

$$\mathcal{F}\{e^{i\omega_0 t} \cdot f(t)\} = F(\omega - \omega_0)$$

Beispiel 6.5.4. Wir betrachten die gedämpfte Schwingung

$$g(t) = e^{-at} \cdot \sin(\omega_0 t) \cdot \sigma(t) \quad (a, \omega_0 > 0)$$

⁶Daher wird dieser Satz auch als *Frequenzverschiebungssatz* bezeichnet.

und verwenden die Korrespondenz

$$f(t) = e^{-at} \cdot \sigma(t) \circ \bullet F(\omega) = \frac{1}{a + i\omega}$$

Zuerst formen wir $\sin(\omega_0 t)$ in Exponentialform um:

$$\sin(\omega_0 t) = \frac{1}{2i} (e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t})$$

und können damit $g(t)$ schreiben als

$$g(t) = e^{-at} \cdot \frac{1}{2i} (e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}) \cdot \sigma(t) = \frac{1}{2i} (e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}) \cdot f(t) = \frac{1}{2i} (e^{i\omega_0 t} \cdot f(t) - e^{-i\omega_0 t} \cdot f(t))$$

An dieser Stelle verwenden wir den *Linearitäts-* und *Dämpfungssatz*, sowie die gegebene Korrespondenz.

$$\begin{aligned} G(\omega) &= \frac{1}{2i} \cdot \mathcal{F}\{e^{i\omega_0 t} \cdot f(t) - e^{-i\omega_0 t} \cdot f(t)\} \\ &= \frac{1}{2i} \cdot (\mathcal{F}\{e^{i\omega_0 t} \cdot f(t)\} - \mathcal{F}\{e^{-i\omega_0 t} \cdot f(t)\}) \\ &= \frac{1}{2i} \cdot (F(\omega - \omega_0) - F(\omega + \omega_0)) \\ &= \frac{1}{2i} \cdot \left(\frac{1}{a + i(\omega - \omega_0)} - \frac{1}{a + i(\omega + \omega_0)} \right) \\ &= \dots \\ &= \frac{\omega_0}{(a + i\omega)^2 + \omega_0^2} \end{aligned}$$

6.5.5 Ableitungssätze

Satz 6.5.5. (Ableitungssatz für die Originalfunktion)

Für die Fourier-Transformierte der n -ten Ableitung der Originalfunktion gilt

$$\mathcal{F}\{f^{(n)}(t)\} = (i\omega)^n \cdot F(\omega)$$

Merksatz: Jeder Differenziationsschritt im Originalbereich bewirkt eine Multiplikation mit $i\omega$ im Bildbereich.

Bemerkung 6.5.6. Wir beweisen diesen Satz nicht, wollen aber die folgenden wichtigen Voraussetzungen erwähnen.

1. Die n -te Ableitung $f^{(n)}(t)$ muss Fourier-transformierbar sein.
2. Die Funktionen $f(t), f'(t), f''(t), \dots, f^{(n-1)}(t)$ verschwinden für $|t| \rightarrow \infty$.

Beispiel 6.5.7. Wir verwenden die Korrespondenz

$$f(t) = e^{-at^2} \circ \bullet F(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$$

um die Fourier-Transformierte von $g(t) = t \cdot e^{-at^2}$ zu bestimmen. Dazu berechnen wir zuerst die Ableitungen von $f(t)$.

$$\begin{aligned} f(t) &= e^{-at^2} \\ f'(t) &= -2at \cdot e^{-at^2} = -2a \cdot \underbrace{t \cdot e^{-at^2}}_{=:g(t)} = -2a \cdot g(t) \end{aligned}$$

Aus dem Ableitungssatz erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f'(t)\} &= \mathcal{F}\{-2a \cdot g(t)\} = -2a \cdot \mathcal{F}\{g(t)\} \\ i\omega \cdot F(\omega) &= -2a \cdot \mathcal{F}\{g(t)\} \\ \mathcal{F}\{g(t)\} &= \frac{i\omega \cdot F(\omega)}{-2a} = \frac{i\omega \cdot \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot e^{-\frac{\omega^2}{4a}}}{-2a} \end{aligned}$$

Satz 6.5.8. (Ableitungssatz für die Bildfunktion)

Die Ableitungen der Bildfunktion $F(\omega)$ erfüllen die Gleichung

$$F^{(n)}(\omega) = \mathcal{F}\{(-it)^n \cdot f(t)\}$$

Merksatz: Die n -te Ableitung der Bildfunktion erhält man als Fourier-Transformierte der mit $(-it)^n$ multiplizierten Originalfunktion⁷.

Beispiel 6.5.9.

Wir bestimmen die Fourier-Transformierte der Funktion $g(t) = t^2 \cdot \underbrace{e^{-at} \cdot \sigma(t)}_{=:f(t)}$, wobei wir die

Korrespondenz

$$f(t) = e^{-at} \cdot \sigma(t) \circ \bullet F(\omega) = \frac{1}{a + i\omega}$$

verwenden und den Ableitungssatz für Bildfunktionen geschickt ins Spiel bringen.

$$\mathcal{F}\{g(t)\} = \mathcal{F}\{t^2 \cdot e^{-at} \cdot \sigma(t)\} = \mathcal{F}\{t^2 \cdot f(t)\} = \mathcal{F}\{-(-it)^2 \cdot f(t)\} = -F''(\omega)$$

Wir berechnen die zweite Ableitung von $F(\omega)$.

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{1}{a + i\omega} = (a + i\omega)^{-1} \\ F'(\omega) &= -i(a + i\omega)^{-2} \\ F''(\omega) &= 2i(a + i\omega)^{-3} \cdot i = \frac{-2}{(a + i\omega)^3} \end{aligned}$$

$$\mathcal{F}\{g(t)\} = \mathcal{F}\{t^2 \cdot e^{-at} \cdot \sigma(t)\} = -F''(\omega) = \frac{2}{(a + i\omega)^3}$$

⁷Daher wird dieser Satz auch *Multiplikationssatz* genannt.

6.5.6 Integrationsatz

Um ein unbestimmtes Integral zu transformieren, kann der folgende Satz verwendet werden, wobei die Voraussetzung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 0$$

an die Funktion $f(t)$ gestellt werden muss.

Satz 6.5.10. Für die Fourier-Transformierte einer Funktion $f(t) = \int_{-\infty}^t f(u) du$ gilt

$$\mathcal{F} \left\{ \int_{-\infty}^t f(u) du \right\} = \frac{1}{i\omega} F(\omega)$$

wobei oben stehende Voraussetzung an $f(t)$ gestellt werden muss.

Merksatz: Man erhält die Bildfunktion eines Integrals, indem man die Bildfunktion durch $i\omega$ dividiert.

6.5.7 Faltungssatz

Hat man die Bildfunktion $F(\omega)$ als Produkt von zwei Bildfunktionen vorliegen, i.e.

$$F(\omega) = F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$$

so können in den Transformationstabellen oft die Originalfunktionen $f_1(t)$ und $f_2(t)$ gefunden werden. Der verführerische Gedanke, dass somit die Originalfunktion $f(t)$ die einfache Gestalt $f(t) = f_1(t) \cdot f_2(t)$ hat, erweist sich leider als falsch. Es lässt sich jedoch zeigen, dass die Originalfunktion $f(t)$ eine Integraldarstellung des Typs

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(u) \cdot f_2(t-u) du$$

besitzt. Solche Integrale kommen erstaunlich oft vor und spielen eine wichtige Rolle in vielen mathematischen Gebieten. Sie wurden daher mit einem eigenen Namen bedacht, dem sogenannten *Faltungsintegral*. Symbolisch schreiben wir

$$f_1(t) * f_2(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(u) \cdot f_2(t-u) du$$

Den Ausdruck $f_1(t) * f_2(t)$ nennen wir *Faltungsprodukt* (sprich f_1 "Stern" f_2).

Bemerkung 6.5.11. Das Wort Produkt ist hier tatsächlich gerechtfertigt, da die gleichen Gesetze wie beim Produkt reeller Zahlen gelten (kommutativ, assoziativ,...).

Satz 6.5.12. Das Produkt von zwei Bildfunktionen korrespondiert mit dem Faltungsprodukt der zugehörigen Originalfunktionen. Symbolisch können wir schreiben:

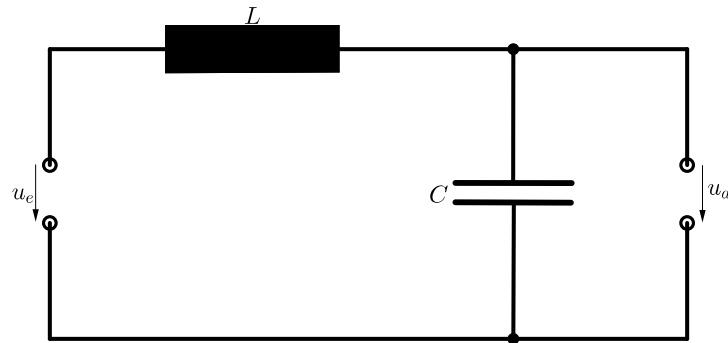
$$\mathcal{F}^{-1}\{F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)\} = f_1(t) * f_2(t) \quad \text{oder} \quad F_1(\omega) \cdot F_2(\omega) \bullet \circ f_1(t) * f_2(t)$$

Anmerkung: Die Funktionen $f_1(t), f_2(t)$ müssen hinreichend integrierbar sein.

Merksatz: Das Produkt der Bildfunktionen korrespondiert mit dem Faltungsprodukt der Originalfunktionen.

Beispiel 6.5.13. Im abgebildeten Schaltkreis betrachten wir die *Bildfunktionen* der Spannungen

$$U_e(\omega) = \mathcal{F}\{u_e(t)\} \quad \text{und} \quad U_a(\omega) = \mathcal{F}\{u_a(t)\}$$



Es gilt der Zusammenhang

$$U_a(\omega) = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \cdot U_e(\omega)$$

mit $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$. Wir haben also $U_a(\omega)$ als Produkt dargestellt und können mit Hilfe einer Transformationstabelle berechnen:

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \right\} = \omega_0 \cdot \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \right\} = \\ &= \omega_0 \cdot e^0 \cdot \sin(\omega_0 t) \cdot \sigma(t) = \omega_0 \cdot \sin(\omega_0 t) \cdot \sigma(t) \end{aligned}$$

Für die unbekannte Eingangsspannung $u_e(t)$ wählen wir den *Diracstoß*

$$f_2(t) = u_e(t) = u_0 \cdot \delta(t)$$

Die gesuchte Ausgangsspannung $u_a(t)$ lässt sich jetzt mit dem Faltungsprodukt berechnen.

$$\begin{aligned} u_a(t) &= f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(u) \cdot f_2(t-u) du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_0 \cdot \sin(\omega_0 u) \cdot \sigma(u) \cdot u_0 \cdot \delta(t-u) du \\ &= \omega_0 u_0 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\omega_0 u) \cdot \sigma(u) \cdot \delta(t-u) du \\ &= \omega_0 u_0 \cdot \int_0^{+\infty} \sin(\omega_0 u) \cdot 1 \cdot \delta(t-u) du \\ &= \omega_0 u_0 \cdot \int_0^{+\infty} \sin(\omega_0 u) \cdot \delta(u-t) du \end{aligned}$$

Da der Zeitparameter t zwischen 0 und ∞ liegt, ist der Wert des Integrals definitionsgemäß gleich dem Wert der Funktion $\sin(\omega_0 u)$ bei $u = t$. Die Lösung lautet somit

$$u_a(t) = \omega_0 u_0 \cdot \sin(\omega_0 t) \quad , (t \geq 0)$$

Der Spannungsstoß erzeugt somit eine ungedämpfte, sinusförmige Wechselspannung am Kondensator.

6.5.8 Vertauschungssatz

Die Originalfunktion $f(t)$ lässt sich nach Gleichung (6.1) durch das Integral

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega$$

darstellen. Die Bezeichnung der Integrationsvariable ist bedeutungslos, wir können also vorübergehend statt ω auch u schreiben.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) \cdot e^{iut} du$$

Führen wir auf beiden Seiten die Substitution $t = -\omega$ durch, erhalten wir die Beziehung

$$f(-\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) \cdot e^{-i\omega u} du$$

Da der Name der Integrationsvariablen immer noch egal ist (und es immer sein wird) können wir auf der rechten Seite u durch t ersetzen und erhalten schlussendlich

$$f(-\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \cdot e^{-i\omega t} dt$$

oder anders ausgedrückt

$$f(-\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \mathcal{F}\{F(t)\}$$

Satz 6.5.14. Aus einer gegebenen Korrespondenz

$$f(t) \circ \bullet F(\omega)$$

erhält man die neue Korrespondenz

$$F(t) \circ \bullet 2\pi \cdot f(-\omega)$$

Beispiel 6.5.15. Aus der bekannten Korrespondenz

$$f(t) = \delta(t + T) \circ \bullet F(\omega) = e^{i\omega T}$$

erhalten wir direkt die neue Korrespondenz

$$F(t) = e^{itT} \circ \bullet 2\pi \cdot \delta(-\omega + T)$$

Für $T = \omega_0$ und aufgrund der Symmetrie der δ -Distribution erhalten wir die interessante Korrespondenz

$$e^{i\omega_0 t} \circ \text{---} \bullet 2\pi \cdot \delta(\omega - \omega_0)$$

Diese Korrespondenz sieht zuerst etwas kryptisch aus, aber physikalisch gesehen sagt sie aus, dass eine harmonische Schwingung $e^{i\omega_0 t}$ nur eine einzige Komponente enthält. Die *Spektralfunktion* verschwindet außer für $\omega = \omega_0$ überall, das Linienspektrum besteht somit nur aus einer einzigen Linie bei ω_0 .

6.6 Anwendungen der Fourier-Transformation

Beispiel 6.6.1. Lösen einer Differenzialgleichung.

Wir lösen die lineare DGL erster Ordnung

$$y' - 3y = -12 \cdot e^{-3t} \cdot \sigma(t)$$

mit Hilfe der Fourier-Transformation.

Unter Verwendung des *Ableitungssatzes* und einer Transformationstabelle transformieren wir die DGL gliedweise.

$$\begin{aligned} y' - 3y &= -12 \cdot e^{-3t} \cdot \sigma(t) \\ i\omega \cdot Y(\omega) - 3 \cdot Y(\omega) &= -12 \cdot \frac{1}{3 + i\omega} \end{aligned}$$

Dabei bezeichnen wir die Fourier-Transformierte von $y(t)$ mit $Y(\omega)$ und verwenden $e^{-at} \cdot \sigma(t) \circ \bullet \frac{1}{a+i\omega}$. In diesem Schritt ist Entscheidendes passiert, denn aus der ursprünglichen Differenzialgleichung wurde eine algebraische Gleichung. Diese lösen wir nach $Y(\omega)$.

$$\begin{aligned} i\omega \cdot Y(\omega) - 3 \cdot Y(\omega) &= -12 \cdot \frac{1}{3 + i\omega} \\ Y(\omega) \cdot (i\omega - 3) &= \frac{-12}{3 + i\omega} \\ Y(\omega) &= \frac{-12}{(3 + i\omega)(-3 + i\omega)} \\ Y(\omega) &= \frac{12}{9 + \omega^2} \end{aligned}$$

Die *Rücktransformation* ist oft der schwierigste Schritt und auch hier ist die Korrespondenz nicht so einfach zu sehen. Die "richtige" Formel lautet

$$e^{-a|t|} \circ \bullet \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

Dies ist erst deutlich sichtbar, wenn wir passend umformen:

$$\frac{12}{9 + \omega^2} = 2 \cdot \frac{6}{9 + \omega^2} = 2 \cdot \frac{2 \cdot 3}{3^2 + \omega^2}$$

Somit erhalten wir ($a = 3$)

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{Y(\omega)\} = 2 \cdot e^{-3|t|}$$

Beispiel 6.6.2. Fourier-Analyse einer gedämpften Schwingung.

Gegeben sei die gedämpfte Schwingung

$$x(t) = x_0 \cdot e^{-kt} \cdot \cos(\omega_0 t) \cdot \sigma(t)$$

wobei $x(t)$ die Auslenkung und $k > 0$ einen Dämpfungsfaktor bezeichnen. Durch die Analyse soll herausgefunden werden, welche harmonischen Schwingungen mit welchen Anteilen in der gedämpften Schwingung enthalten sind. Wir benötigen daher das *Frequenzspektrum* der Funktion $x(t)$.

Um die Rechnung einfacher zu gestalten werden wir die komplexe Darstellung

$$y(t) = x_0 \cdot e^{-kt} \cdot e^{i\omega_0 t} \cdot \sigma(t) \quad (6.4)$$

verwenden. Unsere Originalfunktion $x(t)$ ist in $y(t)$ als Realteil enthalten. Die gleiche Art der Kodierung haben wir bereits bei den rotierenden Zeigern verwendet, die als Überlagerungen gleichfrequenter Schwingungen betrachtet wurden.

Wir bestimmen die Fourier-Transformierte $Y(\omega)$ um danach die gesuchte Fourier-Transformierte $X(\omega)$ als Realteil zu erhalten.

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \mathcal{F}\{y(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \cdot e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x_0 \cdot e^{-kt} \cdot e^{i\omega_0 t} \cdot \sigma(t) \cdot e^{-i\omega t} dt \\ &= x_0 \cdot \int_0^{+\infty} e^{-kt} \cdot e^{-i(\omega - \omega_0)t} dt = x_0 \cdot \int_0^{+\infty} e^{-(k+i(\omega - \omega_0))t} dt \\ &= x_0 \cdot \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt \end{aligned}$$

Hier wurde die Substitution $\alpha = k + i(\omega - \omega_0)$ verwendet.

Auswertung dieses Integrals liefert

$$Y(\omega) = x_0 \cdot \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt = x_0 \cdot \left[\frac{e^{-\alpha t}}{-\alpha} \right]_0^{\infty} = \frac{x_0}{-\alpha} \cdot (0 - 1) = \frac{x_0}{\alpha}$$

Wir machen die vorher getätigte Substitution rückgängig und spalten in Real- und Imaginärteil auf:

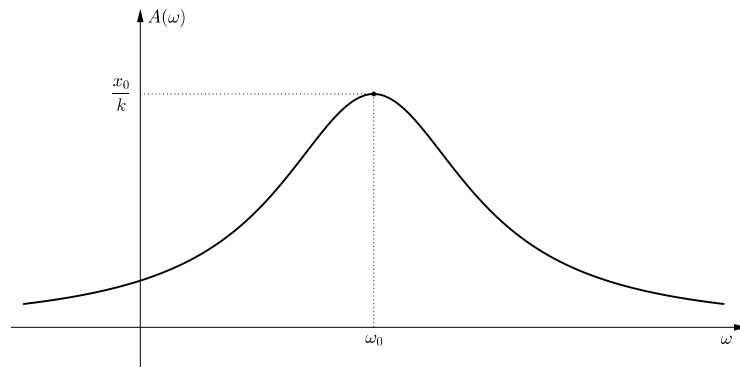
$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \frac{x_0}{\alpha} = \frac{x_0}{k + i(\omega - \omega_0)} = \frac{x_0 \cdot (k - i(\omega - \omega_0))}{(k + i(\omega - \omega_0)) \cdot (k - i(\omega - \omega_0))} \\ &= \frac{x_0 k - x_0 \cdot i(\omega - \omega_0)}{k^2 + (\omega - \omega_0)^2} = \frac{x_0 k}{k^2 + (\omega - \omega_0)^2} - i \cdot \frac{x_0(\omega - \omega_0)}{k^2 + (\omega - \omega_0)^2} \end{aligned}$$

Uns interessiert nur noch der Realteil von $Y(\omega)$, der gegeben ist durch

$$X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \operatorname{Re}(Y(\omega)) = \frac{x_0 k}{k^2 + (\omega - \omega_0)^2}$$

Das Amplitudenspektrum (auch *Lorentz-Kurve* genannt) lautet somit

$$A(\omega) = |X(\omega)| = \frac{x_0 k}{k^2 + (\omega - \omega_0)^2}$$



Das Maximum liegt bei $\omega = \omega_0$, die übrigen Komponenten leisten immer weniger Anteil, je weiter sie von ω_0 entfernt liegen.

7 Laplace-Transformation

Die Fourier-Transformation ist manchmal nicht auf all jene Funktionen anwendbar, die von Interesse sind. Um die Konvergenz des Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

für eine größere Klasse von Funktionen zu gewährleisten, wird der Integrand noch mit einem Faktor der Form $e^{-\alpha t}$ ($\alpha \in \mathbb{R}^+$) versehen.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-\alpha t} \cdot e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-(\alpha+i\omega)t} dt$$

Diese Integral führt uns direkt zur Definition der *Laplace-Transformation*.

Definition 7.0.1. Die Funktion

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt \quad , s \in \mathbb{C} \quad (7.1)$$

nennen wir *Laplace-Transformierte*¹ der Funktion $f(t)$, sofern das uneigentliche Integral konvergiert. Wir verwenden die symbolische Schreibweise

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

Bemerkung 7.0.2.

- Die Integration beginnt bei 0, nicht wie bei der Fourier-Transformation bei $-\infty$.
- Wir verwenden analog zur Fourier-Transformation die Schreibweise für Korrespondenzen

$$f(t) \circ \bullet F(s)$$

- Für die Bildfunktion $F(s)$ gilt

$$\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$$

- Das Laplace-Integral (7.1) existiert auf jeden Fall, wenn die folgenden Voraussetzungen erfüllt sind:

a) $f(t)$ ist stückweise stetig.

b) Für hinreichend großes t gilt $|f(t)| \leq K \cdot e^{\lambda t}$, mit $K > 0$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

Das bedeutet, die Funktion $f(t)$ wächst höchstens exponentiell.

Das Integral konvergiert unter diesen Voraussetzungen in der komplexen Halbebene $\operatorname{Re}(s) > \lambda$.

¹Pierre-Simon (Marquis de) Laplace (1749 – 1827)

In den weiteren Ausführungen werden wir die Variable s immer als reelle Größe voraussetzen, obwohl in Definition (7.1) explizit angegeben wurde, dass s auch komplex sein kann. Die Theorie der Funktionen komplexer Variablen (*Funktionentheorie*) ist jedoch viel zu umfangreich, um hier behandelt werden zu können.

Wir werden uns jetzt der Laplace-Transformation einiger elementarer Funktionen zuwenden.

Beispiel 7.0.3. Laplace-Transformierte der *Heavisidefunktion* $\sigma(t)$.

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ 1 & , t \geq 0 \end{cases}$$

Die Laplace-Transformation lautet

$$F(s) = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-st} dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^{\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{s} \right) = \frac{1}{s}$$

Hier muss nicht nur $s \neq 0$, sondern sogar $s > 0$ verlangt werden. Anderenfalls würde der Ausdruck e^{-st} divergieren.

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s} \quad \text{oder} \quad 1 \circ \bullet \frac{1}{s}$$

Beispiel 7.0.4. Laplace-Transformierte einer linearen Funktion.

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ t & , t \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} t \cdot e^{-st} dt = \left[\frac{-st - 1}{s^2} \cdot e^{-st} \right]_0^{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{-st - 1}{s^2} \cdot e^{-st} \right) - \frac{-1}{s^2} \cdot 1 = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{st + 1}{s^2 \cdot e^{st}} \right) + \frac{1}{s^2} \underbrace{=}_{L'Hospital} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{s}{s^3 \cdot e^{st}} \right) + \frac{1}{s^2} = 0 + \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2} \end{aligned}$$

Wieder müssen wir $s > 0$ verlangen um die Konvergenz zu sichern.

$$t \circ \bullet \frac{1}{s^2}$$

Beispiel 7.0.5. Laplace-Transformierte der Sinus-Funktion.

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ \sin(t) & , t \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
F(s) &= \int_0^{\infty} \sin(t) \cdot e^{-st} dt = \left[\frac{e^{-st}}{s^2 + 1} (-s \cdot \sin(t) - \cos(t)) \right]_0^{\infty} \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{-st}}{s^2 + 1} (-s \cdot \sin(t) - \cos(t)) \right) - \left(\frac{1}{s^2 + 1} (-1) \right) \\
&= 0 + \frac{1}{s^2 + 1} = \frac{1}{s^2 + 1}
\end{aligned}$$

Da die Feststellung $s > 0$ wieder notwendig ist und es sehr oft sein wird, können wir in Zukunft darauf verzichten und behalten sie im Hinterkopf.

$$\sin(t) \circ \bullet \frac{1}{s^2 + 1}$$

Beispiel 7.0.6. Laplace-Transformierte eines Rechteckimpulses.

$$f(t) = \begin{cases} A & , t \in [a; b] \\ 0 & , t \notin [a; b] \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
F(s) &= \int_0^a A \cdot e^{-st} dt + \int_a^b A \cdot e^{-st} dt + \int_b^{\infty} A \cdot e^{-st} dt \\
&= \int_0^a 0 \cdot e^{-st} dt + \int_a^b A \cdot e^{-st} dt + \int_b^{\infty} 0 \cdot e^{-st} dt \\
&= \int_a^b A \cdot e^{-st} dt = \left[A e^{-st} \cdot \left(-\frac{1}{s} \right) \right]_a^b = \left(-\frac{A e^{-sb}}{s} \right) - \left(-\frac{A e^{-sa}}{s} \right) = \\
&= \frac{A(-e^{-sb} + e^{-sa})}{s} = \frac{A(e^{-sa} - e^{-sb})}{s}
\end{aligned}$$

Beispiel 7.0.7. Laplace-Transformierte der δ -Funktion $\delta(t - T)$, $T \geq 0$.

$$\mathcal{L}\{\delta(t - T)\} = \int_0^{\infty} \delta(t - T) \cdot e^{-st} dt = e^{-sT}$$

Hier wurde die *Ausblendeigenschaft* (vgl. Bemerkung ??) verwendet.

7.1 Transformationssätze

Wie bei der Fourier-Transformation existieren auch bei der Laplace-Transformation etliche Transformationssätze mit teils ähnlichen Eigenschaften. Wir nehmen an diesem Punkt Abstand vom Vorhaben, diese Sätze hier genauso ausführlich zu präsentieren. Der Leser sei auf die vielfältige Literatur verwiesen. Wir stellen die Sätze hier in einer Tabelle zusammen, wobei die Gelegenheit genutzt wird, um auch die entsprechenden Resultate der Fourier-Theorie zu tabellieren.

	Originalbereich	Fourier-Bildbereich
Linearitätssatz	$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$	$c_1 F_1(\omega) + c_2 F_2(\omega)$
Ähnlichkeitssatz	$f(at) \quad (a \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$	$\frac{1}{ a } \cdot F\left(\frac{\omega}{a}\right)$
Verschiebungssatz	$f(t - a) \quad (a \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$	$e^{-i\omega a} \cdot F(\omega)$
Dämpfungssatz	$e^{i\omega_0 t} \cdot f(t)$	$F(\omega - \omega_0)$
Ableitung der Originalfunktion	$f^{(n)}(t)$	$(i\omega)^n \cdot F(\omega)$
Ableitung der Bildfunktion	$(-it)^n \cdot f(t)$	$F^{(n)}(\omega)$
Integration der Originalfunktion	$\int_{-\infty}^t f(u) du$	$\frac{1}{i\omega} F(\omega)$
Faltungssatz	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$
Vertauschungssatz	$f(t) \circ \bullet F(\omega) \implies F(t) \circ \bullet 2\pi \cdot f(-\omega)$	

	Originalbereich	Laplace-Bildbereich
Linearitätssatz	$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$	$c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$
Ähnlichkeitssatz	$f(at) \quad (a > 0)$	$\frac{1}{a} \cdot F(s)$
1. Verschiebungssatz	$f(t - a) \cdot \sigma(t - a) \quad (a > 0)$	$e^{-as} \cdot F(s)$
2. Verschiebungssatz	$f(t + a) \cdot \sigma(t) \quad (a > 0)$	$e^{-as} \cdot \left(F(s) - \int_0^a f(t) \cdot e^{-st} dt \right)$
Dämpfungssatz	$e^{-at} \cdot f(t)$	$F(s + a)$
Ableitung der Originalfunktion	$f^{(n)}(t)$	$s^n \cdot F(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} \cdot f^{(k-1)}(0)$
Ableitung der Bildfunktion	$(-t)^n \cdot f(t)$	$F^{(n)}(s)$
Integration der Originalfunktion	$\int_0^t f(u) du$	$\frac{1}{s} F(s)$
Integration der Bildfunktion	$\frac{1}{t} \cdot f(t)$	$\int_s^\infty F(u) du$
Faltungssatz	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(s) \cdot F_2(s)$
1. Grenzwertsatz	$f(0) = \lim_{t \searrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} (s \cdot F(s))$	
2. Grenzwertsatz	$f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} (s \cdot F(s))$	

Bemerkung 7.1.1. (zum Faltungssatz)

Bei der Laplace-Transformation hat das Faltungsintegral eine etwas andere Gestalt als bei der Fourier-Transformation. Setzen wir in die allgemeine Form

$$f_1 * f_2 = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(u) \cdot f_2(t-u) du$$

ein und verwenden $f_i(t) = 0 \forall t < 0$, so erhalten wir

$$f_1 * f_2 = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(u) \cdot f_2(t-u) du = \int_0^{\infty} f_1(u) \cdot f_2(t-u) du$$

Die Integration startet also bei Null. Auch die obere Grenze ändert sich, da $f_2(t-u)$ verschwindet, wenn u größer als t wird. Damit erhalten wir insgesamt die Identität

$$f_1 * f_2 = \int_0^t f_1(u) \cdot f_2(t-u) du$$

für die Laplace-Transformation.

7.2 Laplace Transformation periodischer Funktionen

Für periodische Funktionen kann die Laplace-Transformation durch ein bestimmtes (nicht uneigentliches) Integral berechnet werden. Diese Integraldarstellung werden wir jetzt herleiten.

Haben wir eine periodische Funktion² $f(t)$ mit Periode T gegeben, so lautet die zugehörige Laplace-Transformierte nach Definition

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

Die Integration lässt sich stückweise über Intervalle der Periodenlänge T durchführen:

$$F(s) = \int_0^T f(t) e^{-st} dt + \int_T^{2T} f(t) e^{-st} dt + \int_{2T}^{3T} f(t) e^{-st} dt + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{nT}^{(n+1)T} f(t) e^{-st} dt \right)$$

Durch die Substitution $u = t - nT$ geht die letzte Summe über in die Darstellung

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^T f(u+nT) e^{-s(u+nT)} du \right)$$

Da $f(t)$ eine periodische Funktion mit Periode T ist, gilt $f(u+nT) = f(u)$. Somit vereinfacht sich das Integral noch einmal zu

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^T f(u) e^{-s(u+nT)} du \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-nsT} \cdot \int_0^T f(u) e^{-su} du \right)$$

²Wir betrachten immer noch Funktionen mit $f(t) = 0$ für $t < 0$.

Das verbleibende Integral ist nicht mehr vom Summationsindex n abhängig, wir können es daher ganz aus der Summe herausziehen.

$$F(s) = \left(\int_0^T f(u) e^{-su} du \right) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nsT}$$

Das Integral hat seine endgültige Form erreicht, einfacher kann es sicher nicht mehr dargestellt werden. Die unendliche Summe bedarf noch etwas näherer Betrachtung. Die folgende Umformung zeigt, dass es sich um eine *geometrische Reihe* handelt, die unter der Voraussetzung $s > 0$ konvergiert.

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nsT} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(e^{-sT})^n}_{=:q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-e^{-sT}}$$

Wir fassen unser Ergebnis in einem Satz zusammen.

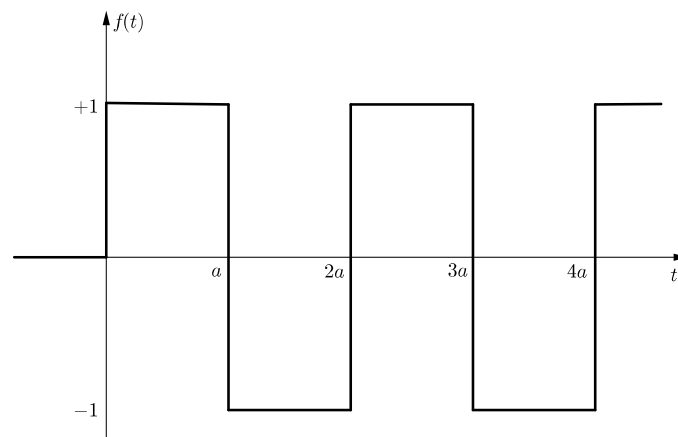
Satz 7.2.1. Die Laplace-Transformierte einer periodischen Funktion $f(t)$ mit Periode T lässt sich durch die Formel

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-sT}} \cdot \int_0^T f(t) e^{-st} dt \quad (7.2)$$

berechnen.

Beispiel 7.2.2. Wir berechnen die Laplace-Transformierte für die periodische Rechtecksfunktion mit Periode $T = 2a$.

$$f(t) = \begin{cases} +1 & , 0 < t < a \\ -1 & , a < t < 2a \end{cases}$$



Aus Gleichung (7.2) erhalten wir

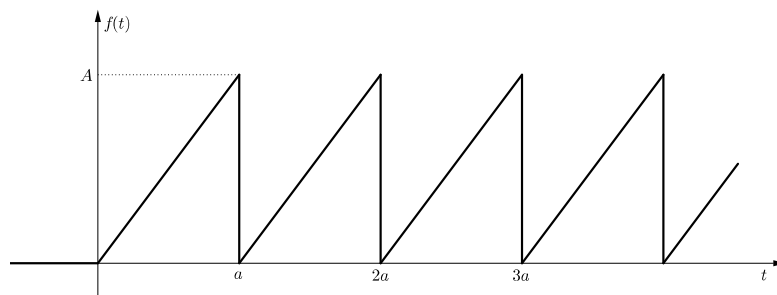
$$\begin{aligned}
 F(s) &= \frac{1}{1 - e^{-2as}} \left(\int_0^a 1 \cdot e^{-st} dt + \int_a^{2a} (-1) \cdot e^{-st} dt \right) \\
 &= \frac{1}{1 - e^{-2as}} \left(\left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^a + \left[\frac{e^{-st}}{s} \right]_a^{2a} \right) \\
 &= \frac{1}{1 - e^{-2as}} \left(\frac{e^{-sa} - 1}{-s} + \frac{e^{-2as} - e^{-as}}{s} \right) \\
 &= \frac{1}{1 - e^{-2as}} \left(\frac{1 - e^{-sa}}{s} + \frac{e^{-2as} - e^{-as}}{s} \right) \\
 &= \frac{1}{1 - e^{-2as}} \left(\frac{1 - 2e^{-as} + e^{-2as}}{s} \right)
 \end{aligned}$$

Ein wenig Hilfe von den Binomischen-Formeln liefert

$$\begin{aligned}
 F(s) &= \frac{1}{1 - e^{-2as}} \left(\frac{1 - 2e^{-as} + e^{-2as}}{s} \right) \\
 &= \frac{1 - 2e^{-as} + e^{-2as}}{s \cdot (1 - e^{-2as})} \\
 &= \frac{(1 - e^{-as})^2}{s \cdot (1 - e^{-as})(1 + e^{-as})} \\
 &= \frac{1 - e^{-as}}{s \cdot (1 + e^{-as})} = \frac{1}{s} \cdot \frac{(1 - e^{-as}) \cdot e^{as}}{(1 + e^{-as}) \cdot e^{as}} \\
 &= \frac{1}{s} \cdot \frac{e^{as} - 1}{e^{as} + 1} = \frac{1}{s} \cdot \tanh\left(\frac{as}{2}\right)
 \end{aligned}$$

Beispiel 7.2.3. Wir bestimmen die Laplace-Transformierte der sogenannten *Sägezahnfunktion* (*Kippschwingung*) mit Periode $T = a$.

$$f(t) = \frac{A}{a} \cdot t \quad , 0 < t < a$$



$$\begin{aligned}
F(s) &= \frac{1}{1 - e^{-at}} \cdot \int_0^a \frac{A}{a} t \cdot e^{-st} dt = \frac{A}{a(1 - e^{-at})} \cdot \int_0^a t \cdot e^{-st} dt \\
&= \frac{A}{a(1 - e^{-at})} \cdot \left[\frac{(-st - 1)}{s^2} \cdot e^{-st} \right]_0^a = \frac{A}{a(1 - e^{-at})} \cdot \frac{(-as - 1) \cdot e^{-as} + 1}{s^2} \\
&= \frac{A [(-as - 1) e^{-as} + 1]}{as^2(1 - e^{-as})}
\end{aligned}$$

Erweitern mit e^{as} und Vereinfachen liefert das Ergebnis

$$F(s) = \frac{A(1 + as - e^{as})}{as^2(1 - e^{as})}$$

Beispiel 7.2.4. Zu bestimmen ist die Originalfunktion von

$$F(s) = \frac{1}{(s^2 + 1)^2}$$

Wir werden den Faltungssatz $f_1 * f_2 \circ \bullet \bullet F_1(s) \cdot F_2(s)$ der Laplace-Transformation verwenden und schreiben $F(s)$ etwas anders auf

$$F(s) = \frac{1}{(s^2 + 1)^2} = \underbrace{\frac{1}{s^2 + 1}}_{F_1(s)} \cdot \underbrace{\frac{1}{s^2 + 1}}_{F_2(s)}$$

Die zugehörigen Originalfunktionen gewinnen wir aus einer Tabelle.

$$\frac{1}{s^2 + 1} \bullet \circ \sin(t)$$

Damit können wir die Originalfunktion $f(t)$ bestimmen:

$$\begin{aligned}
f(t) &= \int_0^t f_1(u) \cdot f_2(t - u) du = \int_0^t \sin(u) \cdot \sin(t - u) du = - \int_0^t \sin(u) \cdot \sin(u - t) du \\
&= - \left[-\frac{1}{4} \sin(2u - t) + u \frac{\cos(-t)}{2} \right]_0^t = - \left(-\frac{1}{4} \sin(t) + \frac{t \cos(t)}{2} - \frac{1}{4} \sin(-t) \right) \\
&= - \left(-\frac{1}{4} \sin(t) + \frac{t \cos(t)}{2} - \frac{1}{4} \sin(t) \right) = \frac{\sin(t)}{2} - \frac{t \cos(t)}{2}
\end{aligned}$$

7.3 Anwendungen der Laplace-Transformation

Ein in der Elektro- und Regelungstechnik weit verbreitetes Verfahren zur Lösung linearer DGL 1. und 2. Ordnung liefert die Laplace-Transformation. Die grundsätzliche Vorgehensweise haben wir auch schon im Kapitel über Fourier-Transformationen kennengelernt.

- Die lineare DGL wird mit der Laplace-Transformation in eine algebraische Gleichung transformiert.
- Die Lösung dieser Gleichung entspricht der Bildfunktion $Y(s)$ der gesuchten Lösung $y(t)$.
- Durch Rücktransformation erhält man die gesuchte Lösung $y(t)$ der gestellten Anfangswertaufgabe.

Beispiel 7.3.1. Lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

$$y' + 2y = 2t - 4 \quad \text{Anfangswert: } y(0) = 1$$

Wir lösen die DGL in den oben beschriebenen drei Schritten.

1. Schritt: Transformieren der DGL in den Bildbereich^a.

$$\begin{aligned} y' + 2y &= 2t - 4 \\ [s^1 \cdot Y(s) - y(0)] + 2Y(s) &= 2 \cdot \mathcal{L}\{t\} - 4 \cdot \mathcal{L}\{1\} \\ s \cdot Y(s) - 1 + 2Y(s) &= \frac{2}{s^2} - \frac{4}{s} \end{aligned}$$

2. Schritt: Lösen der algebraischen Gleichung im Bildbereich.

$$\begin{aligned} Y(s) \cdot (s + 2) - 1 &= \frac{2}{s^2} - \frac{4}{s} \\ Y(s) &= \frac{1}{s + 2} + \frac{2}{s^2(s + 2)} - \frac{4}{s(s + 2)} \end{aligned}$$

3. Rücktransformation vom Bild- in den Originalbereich^a.

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + 2} + \frac{2}{s^2(s + 2)} - \frac{4}{s(s + 2)}\right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + 2}\right\} + 2 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s + 2)}\right\} - 4 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s + 2)}\right\} \\ &= e^{-2t} + 2 \cdot \frac{e^{-2t} + 2t - 1}{4} - 4 \cdot \frac{e^{-2t} - 1}{-2} \\ &= e^{-2t} + \frac{1}{2} e^{-2t} + t - \frac{1}{2} + 2 e^{-2t} - 2 \\ &= \mathbf{3,5 \cdot e^{-2t} + t - 2,5} \end{aligned}$$

^aMit Verwendung entsprechender Transformationstabellen.

Beispiel 7.3.2. Lineare Differenzialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

$$y'' + 2y' + y = 9e^{2t} \quad \text{Anfangswerte: } y(0) = 0, y'(0) = 1$$

1. Schritt: Transformieren der DGL.

$$\begin{aligned} y'' + 2y' + y &= 9e^{2t} \\ [s^2 \cdot Y(s) - s \cdot 0 - 1] + 2[s \cdot Y(s) - 0] + Y(s) &= \frac{9}{s-2} \\ s^2 \cdot Y(s) - 1 + 2s \cdot Y(s) + Y(s) &= \frac{9}{s-2} \end{aligned}$$

2. Schritt: Auflösen der Gleichung nach $Y(s)$.

$$\begin{aligned} Y(s) \cdot (s^2 + 2s + 1) - 1 &= \frac{9}{s-2} \\ Y(s) &= \frac{9}{(s-2)(s^2 + 2s + 1)} + \frac{1}{s^2 + 2s + 1} \\ Y(s) &= \frac{9 + (s-2)}{(s-2)(s+1)^2} \\ Y(s) &= \frac{7+s}{(s-2)(s+1)^2} \end{aligned}$$

Vor der Rücktransformation müssen wir den erhaltenen Bruch mittels *Partialbruchzerlegung* in eine Summe einfacher Brüche umwandeln.

$$\begin{aligned} \frac{7+s}{(s-2)(s+1)^2} &= \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{s-2} \\ &= \frac{A(s+1)(s-2) + B(s-2) + C(s+1)^2}{(s-2)(s+1)^2} \end{aligned}$$

$$7+s = A(s+1)(s-2) + B(s-2) + C(s+1)^2$$

$$s = -1: \quad 7-1 = B(-1-2) \implies \mathbf{B = -2}$$

$$s = +2: \quad 7+2 = C(2+1)^2 \implies \mathbf{C = 1}$$

$$\begin{aligned} s = 0: \quad 7+0 &= A(0+1)(0-2) - 2(0-2) + 1(0+1)^2 \\ 7 &= -2A + 4 + 1 \implies \mathbf{A = -1} \end{aligned}$$

Somit haben wir die Darstellung

$$Y(s) = \frac{-1}{s+1} - \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{1}{s-2}$$

3. Schritt: Rücktransformation in den Originalbereich.

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{s+1} - \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{1}{s-2}\right\} \\
 &= -1 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - 2 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} \\
 &= -e^{-t} - 2te^{-t} + e^{2t} \\
 &= -e^{-t} \cdot (2t + 1) + e^{2t}
 \end{aligned}$$

Beispiel 7.3.3. Wir lösen die DGL $y'' - 5y' + 4y = x$ mit den Randbedingungen $y(0) = 1$ und $y'(0) = 1$.

$$\begin{aligned}
 y'' - 5y' + 4y &= x \\
 s^2 \cdot Y(s) - s \cdot y(0) - y'(0) - 5 \cdot (s \cdot Y(s) - y(0)) + 4 \cdot Y(s) &= \frac{1}{s^2} \\
 s^2 \cdot Y(s) - s - 1 - 5 \cdot (s \cdot Y(s) - 1) + 4 \cdot Y(s) &= \frac{1}{s^2} \\
 s^2 \cdot Y(s) - 5s \cdot Y(s) + 4 \cdot Y(s) &= \frac{1}{s^2} + s - 4 \\
 Y(s) \cdot (s^2 - 5s + 4) &= \frac{1}{s^2} + \frac{s^3}{s^2} - \frac{4s^2}{s^2} \\
 Y(s) &= \frac{1 + s^3 - 4s^2}{s^2 \cdot (s^2 - 5s + 4)}
 \end{aligned}$$

Für die notwendige PZB-Zerlegung berechnen wir die Nullstellen des Nenners:

$$\begin{aligned}
 s^2 \cdot (s^2 - 5s + 4) &= 0 \\
 s_1 = s_2 &= 0 \\
 s^2 - 5s + 4 &= 0 \\
 s_3 &= 4 \\
 s_4 &= 1
 \end{aligned}$$

Somit haben wir den Ansatz

$$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s-1} + \frac{D}{s-4}$$

Wir bestimmen die Konstanten B, C und D im Zähler durch Einsetzen der Werte 0, 1 und 4:

$$\frac{1 + s^3 - 4s^2}{s^2(s-1)(s-4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s-1} + \frac{D}{s-4}$$

$$1 + s^3 - 4s^2 = A \cdot s(s-1)(s-4) + B \cdot (s-1)(s-4) + C \cdot s^2(s-4) + D \cdot s^2(s-1)$$

$$\begin{aligned}
 s = 0: \quad 1 &= 4B \implies B = \frac{1}{4} \\
 s = 1: \quad -2 &= -3C \implies C = \frac{2}{3} \\
 s = 4: \quad 1 &= 48D \implies D = \frac{1}{48}
 \end{aligned}$$

Die Konstante A bekommen wir aufgrund der doppelten Nullstelle nicht auf diesem Weg, wir können aber einen beliebigen anderen Wert für s einsetzen und unsere bereits bestimmten Konstanten verwenden.

$$\begin{aligned}
 s = 2: \quad 1 + 8 - 16 &= -4A - 2\frac{1}{4} - 8\frac{2}{3} + 4\frac{1}{48} \\
 -7 &= -4A - \frac{1}{2} - \frac{16}{3} + \frac{1}{12} \\
 \frac{7}{4} &= A + \frac{1}{8} + \frac{4}{3} - \frac{1}{48} \\
 \frac{5}{16} &= A
 \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir für die Laplace-Transformierte

$$Y(s) = \frac{5}{16s} + \frac{1}{4s^2} + \frac{2}{3(s-1)} + \frac{1}{48(s-4)}$$

Diese Brüche sind leicht mit einer Korrespondenztabelle zu transformieren. Die Lösung der DGL lautet

$$y(x) = \frac{5}{16} + \frac{1}{4}x + \frac{2}{3}e^x + \frac{1}{48}e^{4x}$$

Beispiel 7.3.4. Entladung eines Kondensators.

Die Entladung eines Kondensators mit Kapazität C über einen ohmschen Widerstand R kann durch die DGL

$$\dot{u} + \frac{1}{RC} \cdot u = 0 \quad \text{Anfangswert: } u(0) = u_0$$

beschrieben werden.

Wir transformieren in den Bildbereich

$$s \cdot U(s) - u_0 + \frac{1}{RC} \cdot U(s) = \mathcal{L}\{0\} = 0$$

und lösen nach $U(s)$ auf.

$$\begin{aligned}
 U(s) \cdot \left(s + \frac{1}{RC} \right) - u_0 &= 0 \\
 U(s) \cdot \left(s + \frac{1}{RC} \right) &= u_0 \\
 U(s) &= \frac{u_0}{s + \frac{1}{RC}}
 \end{aligned}$$

Wir führen die Rücktransformation durch und erhalten als Lösung für $u(t)$:

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{u_0}{s + \frac{1}{RC}} \right\} = u_0 \cdot \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s + \frac{1}{RC}} \right\}$$

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

Die Spannung fällt somit exponentiell ab.

Beispiel 7.3.5. Gekoppelte mechanische Schwingung.

In diesem Beispiel wird ein *System* von linearen Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten betrachtet.

Zwei gekoppelte, schwingungsfähige Systeme seien beschrieben durch die Gleichungen

$$\ddot{x}_1 + 5x_1 - 4x_2 = 0$$

$$\ddot{x}_2 + 5x_2 - 4x_1 = 0$$

mit den Anfangswerten

$$x_1(0) = A \quad \dot{x}_1(0) = 0 \quad x_2(0) = -A \quad \dot{x}_2(0) = 0$$

Wir transformieren die Gleichungen nacheinander in den Bildbereich.

$$s^2 X_1(s) - s x_1(0) - \dot{x}_1(0) + 5X_1(s) - 4X_2(s) = 0$$

$$s^2 X_1(s) - As - 0 + 5X_1(s) - 4X_2(s) = 0$$

$$X_1(s) \cdot (s^2 + 5) - 4X_2(s) = As$$

$$s^2 X_2(s) - s x_2(0) - \dot{x}_2(0) + 5X_2(s) - 4X_1(s) = 0$$

$$s^2 X_2(s) + As - 0 + 5X_2(s) - 4X_1(s) = 0$$

$$X_2(s) \cdot (s^2 + 5) - 4X_1(s) = -As$$

Die Lösung dieses linearen Gleichungssystems lautet

$$X_1(s) = \frac{As}{s^2 + 9}$$

$$X_2(s) = \frac{-As}{s^2 + 9}$$

Die Rücktransformation liefert

$$x_1(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{As}{s^2 + 9} \right\} = A \cdot \cos(3t)$$

$$x_2(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-As}{s^2 + 9} \right\} = -A \cdot \cos(3t)$$

8 Numerisches Lösen von Differenzialgleichungen

Das Lösen von Differenzialgleichungen kann nur in bestimmten Fällen analytisch erfolgen und selbst dann kann der Rechenaufwand sehr groß werden. In der Praxis treten häufig Gleichungen auf, die prinzipiell nicht analytisch lösbar sind. Das trifft nicht nur auf Differenzialgleichungen zu, schon der viel zu jung verstorbene norwegische Mathematiker *Niels Henrik Abel*¹ konnte beweisen, dass algebraische Gleichungen fünften Grades nicht auflösbar sind. Der noch jünger verstorbene französische Mathematiker *Évariste Galois*² konnte Abels Beweis entscheidend verallgemeinern.

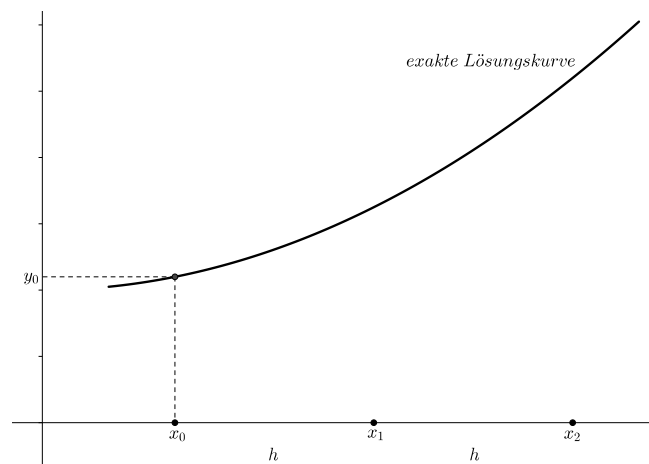
8.1 Numerische Integration einer DGL 1.Ordnung

In diesem Abschnitt lernen wir zwei Verfahren kennen, die zur Lösung von Differenzialgleichungen 1.Ordnung geeignet sind. Es handelt sich dabei um das *Eulersche Streckenzugverfahren* und das *Runge-Kutta-Verfahren 4.Ordnung*. Letzteres kann auch auf Differenzialgleichungen 2.Ordnung angewandt werden.

8.1.1 Streckenzugverfahren nach Euler

Wir suchen für die gegebene DGL $y'(x) = f(x; y)$ mit Anfangswert $y(x_0) = y_0$ eine Lösung im Intervall $[a; b]$.

Zuerst teilen wir das Intervall in n Teile gleicher Länge. Der Abstand der Teilungspunkte x_i wird als Schrittweite h bezeichnet und errechnet sich elementar mit $h = \frac{b-a}{n}$. Das nachfolgende Bild veranschaulicht die Situation.

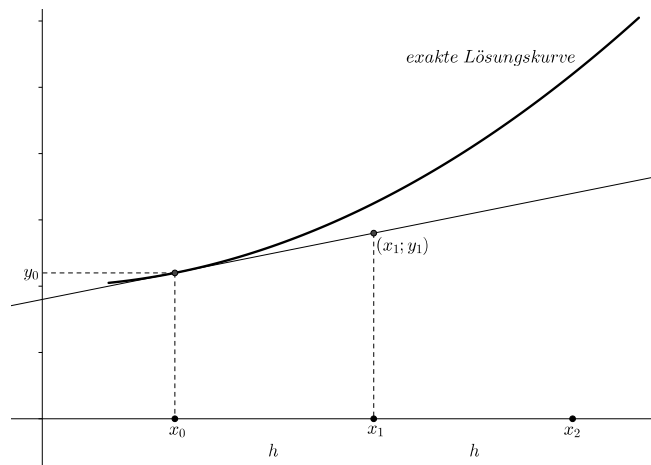


Eulers Idee bestand nun darin, die (unbekannte) Lösungskurve durch einen Streckenzug (Polygonzug) anzunähern. Dieser Polygonzug besteht aus lauter kleinen Tangenten, deren Steigungen aus der Differenzialgleichung gewonnen werden können.

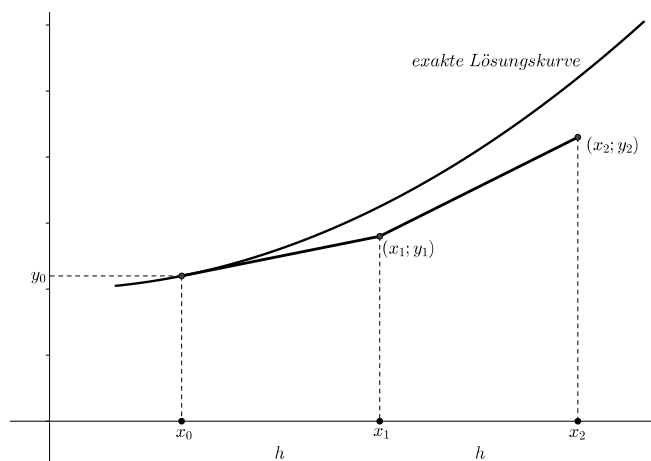
¹*Niels Henrik Abel* (1802 – 1829)

²*Évariste Galois* (1811 – 1832)

Ausgehend vom (exakten) Punkt $(x_0; y_0)$ legen wir die Tangente $t_0(x)$ an die Kurve und erhalten dadurch eine lineare Näherung für den Kurvenverlauf. Der nächste Punkt unseres Polygonzugs ist der Punkt $(x_1; y_1)$, wobei $y_1 = t_0(x_1)$ der entsprechende Punkt auf der Tangente ist. Die nächste Abbildung veranschaulicht unser Vorgehen wieder geometrisch.



Jetzt wird das Verfahren iterativ fortgesetzt. Wir berechnen aus der gegebenen DGL die Steigung der Tangente im Punkt $(x_1; y_1)$, legen eine Gerade mit dieser Steigung durch $(x_1; y_1)$ und werten sie an der Stelle x_2 aus. Somit bekommen wir den nächsten Punkt unseres Polygonzugs $(x_2; y_2)$.



Dieses Vorgehen lässt sich auch elegant in einer Formel darstellen, die zu den Teilungspunkten x_i , die zugehörigen Funktionswerte y_i des Polygonzugs angibt.

Satz 8.1.1. Die Lösungskurve $y = y(x)$ einer DGL vom Typ $y'(x) = f(x; y)$ mit Anfangswert $P(x_0; y_0)$ lässt sich durch die Vorschrift

$$y(x_k) \approx y_k = y_{k-1} + h \cdot y'(x_{k-1}; y_{k-1}) \quad , k = 1, 2, \dots, n$$

näherungsweise berechnen. Die Konstante h ist die zugehörige Schrittweite.

Bemerkung 8.1.2. Das Eulersche Streckenzugverfahren ist sehr einfach, aber auch recht ungenau. Es ist anschaulich klar, dass die Approximation umso besser wird, je kleiner h gewählt wird. Bei sehr

kleinen Schrittweiten ergibt sich jedoch auch ein sehr hoher Rechenaufwand.

Um das Verfahren händisch möglichst effizient durchführen zu können, empfiehlt es sich eine Tabelle anzulegen.

k	x	y	$h \cdot y'(x; y)$
0	x_0	y_0	$h \cdot y'(x_0; y_0)$
1	$x_1 = x_0 + h$	$y_1 = y_0 + h \cdot y'(x_0; y_0)$	$h \cdot y'(x_1; y_1)$
2	$x_2 = x_1 + h$	$y_2 = y_1 + h \cdot y'(x_1; y_1)$	$h \cdot y'(x_2; y_2)$
3	$x_3 = x_2 + h$	$y_3 = y_2 + h \cdot y'(x_2; y_2)$	$h \cdot y'(x_3; y_3)$
...

Beispiel 8.1.3. Das Anfangswertproblem $y' = y + e^x$ mit $y(0) = 1$ ist exakt lösbar mit der Lösung $y(x) = (x + 1)e^x$. Wir berechnen eine Näherungslösung mit dem Streckenzugverfahren und ermitteln den prozentualen Fehler.

Für dieses Beispiel betrachten wir das Intervall $[0; 0, 2]$ und die Schrittweite $h = 0, 05$.

k	x	y	$h \cdot y'(x; y)$	Exakter Wert	Fehler in %
0	0,00	1,000000	0,100000	1,000000	0,000%
1	0,05	1,100000	0,107564	1,103835	-0,347%
2	0,10	1,207564	0,115637	1,215688	-0,668%
3	0,15	1,323200	0,124252	1,336109	-0,966%
4	0,20	1,447452		1,465683	-1,244%

Unser genäherter Polygonzug verläuft im Intervall etwas unterhalb der exakten Lösung, der Fehler bleibt dabei relativ gering.

8.1.2 Runge-Kutta-Verfahren 4.Ordnung

Es gibt eine ganze Familie von Näherungsverfahren, die nach *Carl Runge*³ und *Wilhelm Kutta*⁴ benannt wurden. Wenn einfach vom *Runge-Kutta-Verfahren* gesprochen wird, so meint man das klassische, 4.stufige Verfahren, mit dem wir uns hier beschäftigen wollen.

Die Idee ist dem Eulerschen Streckenzugverfahren sehr ähnlich. Der entscheidende Unterschied liegt darin, dass beim Eulerverfahren nur die Steigung an einer Stelle berücksichtigt wird, während beim

³Carl David Tolmé Runge (1856 – 1927)

⁴Martin Wilhelm Kutta (1867 – 1944)

Runge-Kutta-Verfahren eine Art *mittlere Steigung* berechnet wird. Dazu werden die Steigungen an den Intervallenden, sowie in der Intervallmitte berechnet und unterschiedlich gewichtet. Der Vorteil des Runge-Kutta Verfahrens liegt in seiner wesentlich höheren Präzision, diese ist aber einem deutlich höheren Rechenaufwand geschuldet.

Satz 8.1.4. Die Lösungskurve $y = y(x)$ einer DGL vom Typ $y'(x) = f(x; y)$ mit Anfangswert $P(x_0; y_0)$ lässt sich durch die Vorschrift

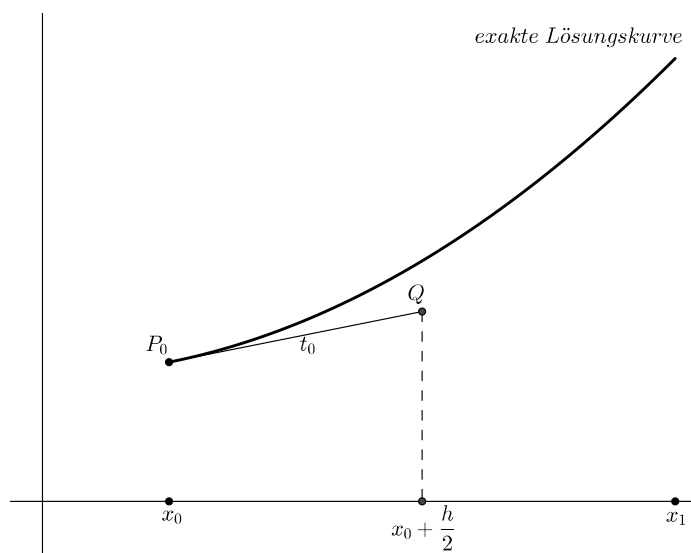
$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0 \\ y(x_n) &= y_n = y_{n-1} + \frac{1}{6} \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 &= h \cdot f(x_{n-1}; y_{n-1}) \\ k_2 &= h \cdot f\left(x_{n-1} + \frac{h}{2}; y_{n-1} + \frac{k_1}{2}\right) \\ k_3 &= h \cdot f\left(x_{n-1} + \frac{h}{2}; y_{n-1} + \frac{k_2}{2}\right) \\ k_4 &= h \cdot f(x_{n-1} + h; y_{n-1} + k_3) \end{aligned}$$

berechnen.

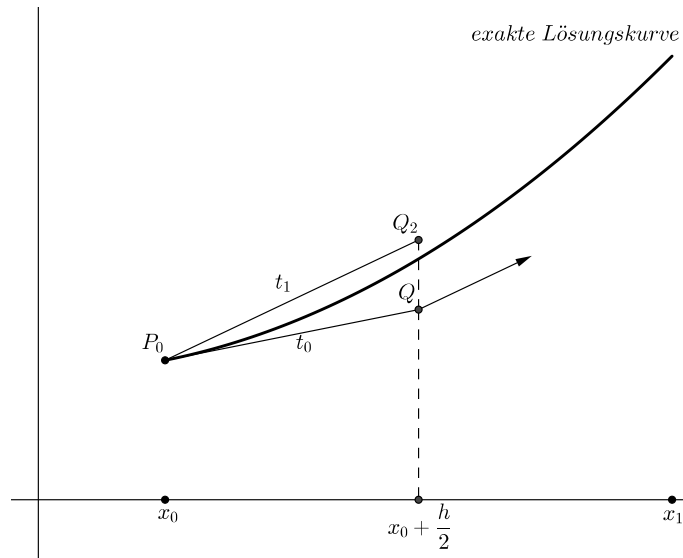
Geometrische Interpretation:

Aus dem obigen Satz kann nur schwer herausgelesen werden, welche Idee hinter dem Verfahren steht. Wir wollen jetzt versuchen die geometrischen Eigenschaften des Verfahrens schrittweise zu verstehen.

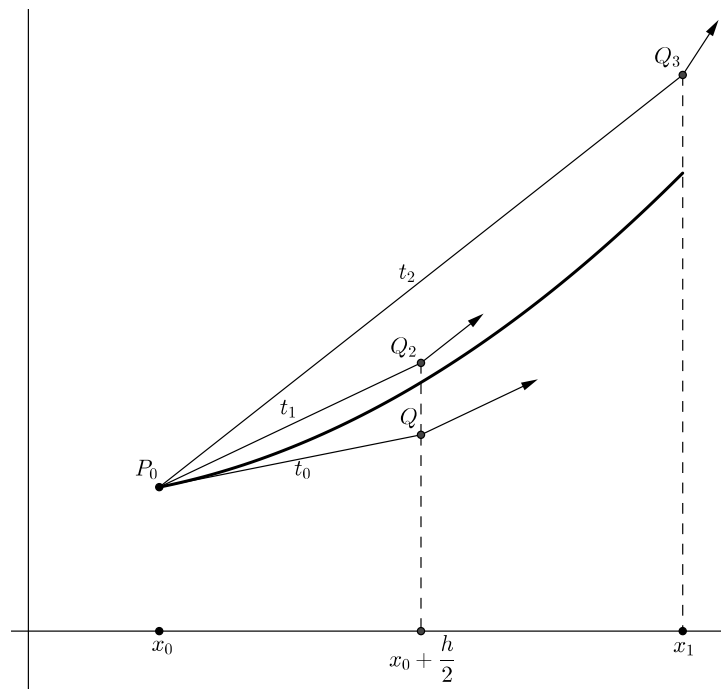
1. Schritt: Wir legen die Tangente t_0 im Punkt $P_0(x_0; y_0)$ (Anfangswert) und bestimmen den Ordinatenwert der Tangente in der Intervallmitte. So erhalten wir den Punkt $Q(x_0 + h; y_0 + \frac{k_1}{2})$.



2. Schritt: Aus der DGL ermitteln wir die Steigung im Punkt Q . Mit dieser Steigung legen wir eine neue Gerade t_1 , diesmal wieder von P_0 ausgehend. Anschließend wird wieder der Ordinatenwert in der Intervallmitte bestimmt. So erhalten wir den Punkt Q_2 .



3. Schritt: Erneut wird aus der DGL die Steigung, diesmal im Punkt Q_2 ermittelt. Mit dieser Steigung wird eine dritte Gerade t_2 durch P_0 gelegt. Diesmal wird der Ordinatenwert aber am Intervallende ermittelt, womit wir den Punkt Q_3 erhalten.

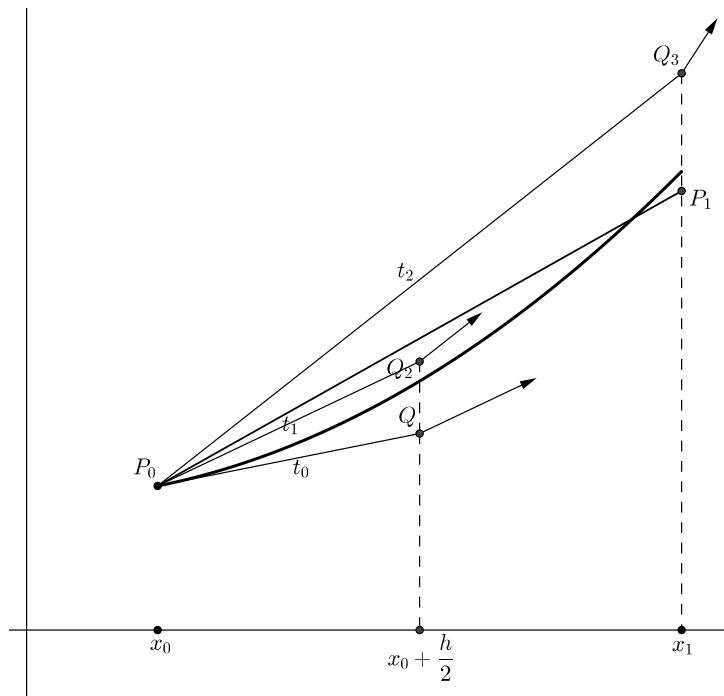


4. Schritt: Aus der DGL erhalten wir auch im Punkt Q_3 eine Steigung für die Tangente in diesem Punkt. Insgesamt haben wir in den Punkten P_0, Q_1, Q_2 und Q_3 vier Steigungen erhalten, die wir mit m_1, \dots, m_4 bezeichnen.

Die Steigungen jener Geraden, die uns zum endgültigen Näherungswert P_1 führt, errechnet sich mit die Formel

$$m = \frac{m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4}{6}$$

Dieser Wert kann als ein gewichteter Mittelwert im Intervall $[x_0; x_1]$ betrachtet werden.



An dieser Stelle wiederholt sich das Verfahren von vorne. Es müssen für den nächsten Abschnitt wieder alle Schritte durchgeführt werden um zum nächsten Punkt P_2 zu kommen. Ein abschließendes Beispiel soll dieses sehr genau Näherungsverfahren demonstrieren.

Beispiel 8.1.5. Wir wenden das Runge-Kutta-Verfahren auf die gleiche DGL an, die wir schon für das Eulersche-Streckenverfahren verwendet haben. Damit haben wir einen direkten Vergleich der beiden Methoden. Gegeben sei noch einmal

$$y' = y + e^x \quad , y(0) = 1$$

mit dem Intervall $[0; 0,2]$ und der Schrittweite $h = 0,05$.

P	x	y	f(x;y) = y + e ^x	k = h f(x;y) = 0,05(y + e ^x)	exakter Wert
0	0,000	1,000000000	2	0,10000000	1
	0,025	1,050000000	2,075315121	0,10376576	
	0,025	1,051882878	2,077197999	0,10385990	
	0,050	1,103859900	2,155130996	0,10775655	
			m=	0,10383464	
1	0,050	1,103834644	2,15510574	0,10775529	1,103834651
	0,075	1,157712287	2,235596438	0,11177982	
	0,075	1,159724555	2,237608705	0,11188044	
	0,100	1,215715079	2,320885997	0,11604430	
			m=	0,11185335	
2	0,100	1,215687994	2,320858912	0,11604295	1,21568801
	0,125	1,273709467	2,40685792	0,12034290	
	0,125	1,275859442	2,409007895	0,12045039	
	0,150	1,336138389	2,497972631	0,12489863	
			m=	0,12042136	
3	0,150	1,336109354	2,497943596	0,12489718	1,336109379
	0,175	1,398557943	2,58980416	0,12949021	
	0,175	1,400854458	2,592100674	0,12960503	
	0,200	1,465714387	2,687117145	0,13435586	
			m=	0,12957392	
4	0,200	1,465683274			1,46568331

Der Runge-Kutta Algorithmus ist deutlich rechenintensiver als das Streckenverfahren nach Euler, daher wurde die Tabelle computerunterstützt erstellt.

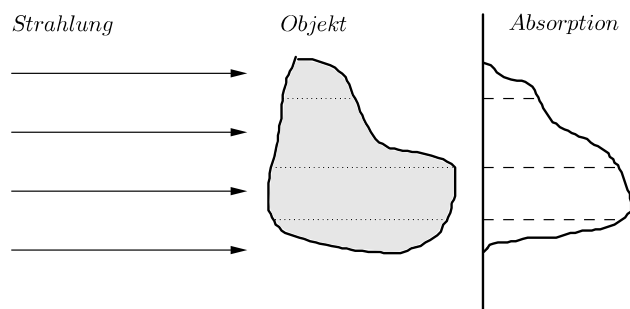
Die Genauigkeit des Verfahrens ist erstaunlich. Erst in der siebenten Nachkommastelle tritt ein erster Unterschied auf.

9 Radon Transformation

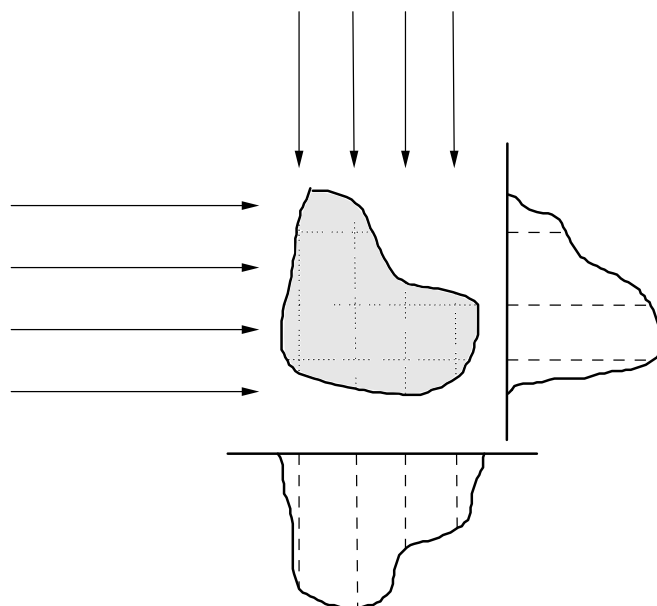
Die nach dem österreichischen Mathematiker *Johann Radon*¹ benannte Transformation ist ein herausragendes Beispiel für die flexible Anwendbarkeit mathematischer Ideen. Radon war es leider nicht vergönnt die wohl wichtigste Anwendung seiner Entwicklung mitzuerleben. Die heute in der Medizin nicht mehr wegzudenkende *Computertomographie* macht ausgiebig Gebrauch von dieser Integraltransformation.

Wir werden hier keine mathematischen Details herausarbeiten, jedoch versuchen die grundlegende Idee und das Prinzip zu verstehen. Dazu beginnen wir am (vorläufigen) Ende der Geschichte, die aktuelle Anwendung in der digitalen Bildverarbeitung soll uns als einführendes Beispiel dienen.

Wir bestrahlen einen Körper mit parallelen Röntgenstrahlen und messen auf der Rückseite, wie viel der Strahlung absorbiert wurde. Je dichter und dicker der Körper ist, desto mehr Strahlung wird absorbiert werden.



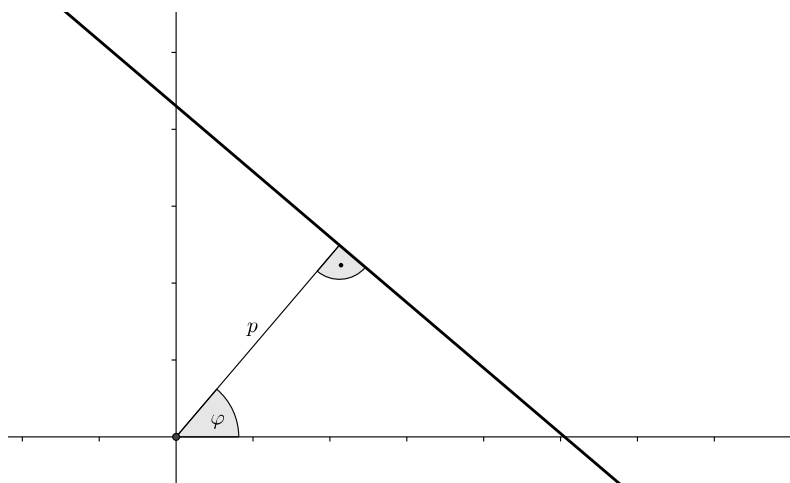
Die Aufgabe besteht darin, aus dem gewonnenen Absorptionsbild das originale Objekt zu rekonstruieren. Mit einer einzigen Durchleuchtung wird das nicht möglich sein, aber mit vielen Bildern aus verschiedenen Winkeln kann tatsächlich eine gute Rekonstruktion erzielt werden.



¹ *Johann Karl August Radon (1887-1956)*

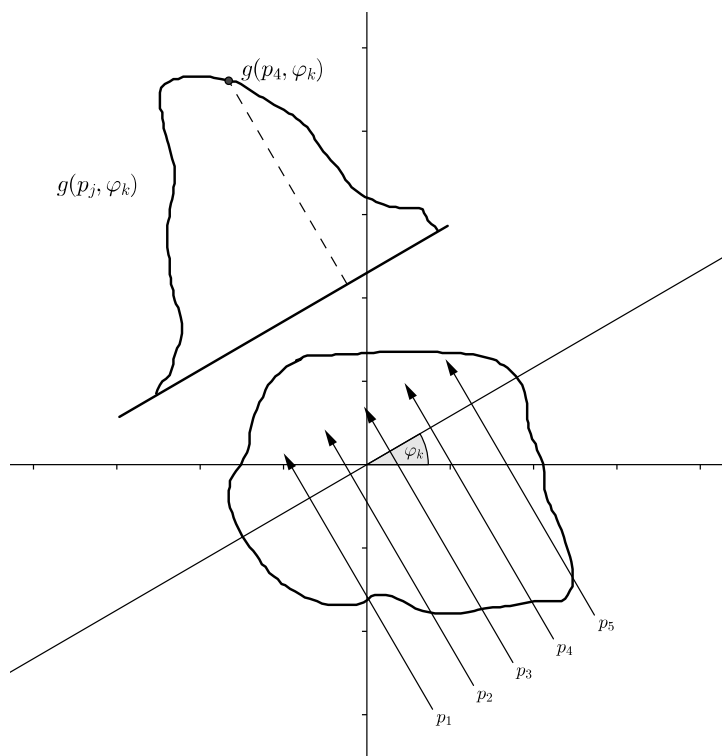
9.1 Mathematische Beschreibung

Zuerst beschreiben wir die Wege der Strahlung durch das Objekt. Dabei handelt es sich einfach um Geraden, die wir aber in einer etwas ungewöhnlichen Parametrisierung angeben. Statt der üblichen $y(x) = kx + d$ Formel mit Steigung k und Achsenabschnitt d verwenden wir als Parameter den Abstand zum Ursprung p , sowie die Neigung φ , wie in der folgenden Skizze abgebildet.



Die Gerade kann durch die Gleichung $x \cdot \cos(\varphi) + y \cdot \sin(\varphi) = p$ beschrieben werden. Die Herleitung dieser Gleichung verläuft völlig analog zu Beispiel 3.3.12.

Ein einzelner Strahl wird mit einer gewissen Intensität durch das Objekt, z.B. einen Patienten, geschickt. Während er das Objekt durchdringt verliert der Strahl an Intensität. Diesen Verlust können wir messen. Mathematisch lässt sich dieser Vorgang als (Kurven)Integral längs der zurückgelegten Geraden beschreiben.



Die Funktionswerte des Absorptionsbildes werden durch die Gleichung

$$g(p; \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x; y) \cdot \delta(x \cos(\varphi) + y \sin(\varphi) - p) dx dy \quad (9.1)$$

beschrieben. Die Funktion $f(x; y)$ beschreibt die Abnahme der Intensität im Punkt $(x; y)$. Wir können uns darunter so etwas wie die Dichte des Objekts vorstellen. Die Diracsche Deltafunktion $\delta(x \cos(\varphi) + y \sin(\varphi) - p)$ stellt sicher, dass wir nur Punkte entlang der $p\varphi$ -Geraden auswerten.

Die Gleichung (9.1) wird als *Radontransformation* bezeichnet.

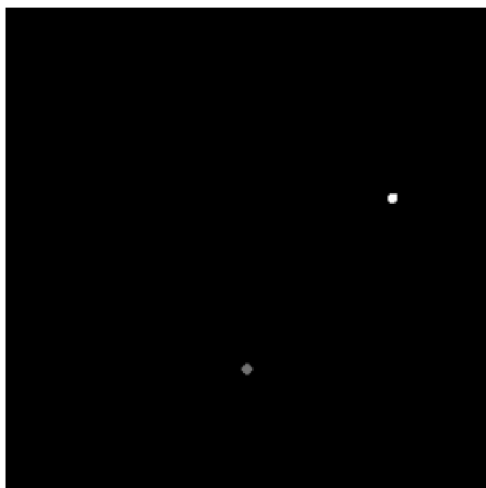
Bemerkung 9.1.1. *Dies ist nur eine mögliche Definition der Radontransformation. Obwohl es sich um ein Kurvenintegral handelt, haben wir es als Doppelintegral aufgeschrieben. Eine alternative und gleichwertige Definition würde die Parametrisierung der Geraden mit dem üblichen Kurvenintegral verbinden, z.B.*

$$g(p; \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(p \cos(\varphi) + t \sin(\varphi), p \sin(\varphi) - t \cos(\varphi)) dt$$

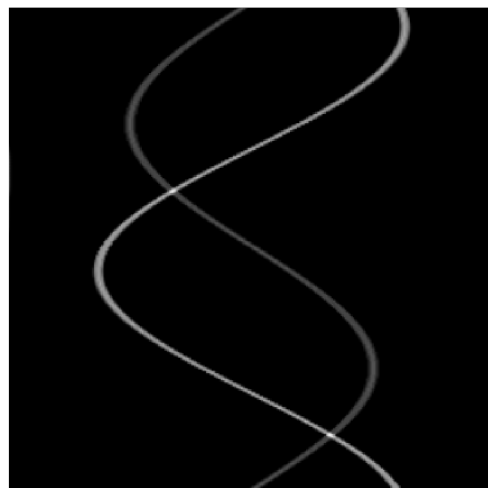
Wir werden uns nur mit zweidimensionalen Objekten beschäftigen, um die Anschauung nicht unnötig komplizierter zu machen. Es ist klar, dass moderne Computerthomographen "um den Patienten herum" scannen, also eine dreidimensionale Transformation notwendig ist.

In der Praxis wird aus den vielen gewonnenen Absorptionsdaten eine *Sinogramm* erstellt. Für einen festen Winkel φ werden alle Absorptionswerte der parallelen Geraden in Grautöne umgerechnet. Je höher die Absorption, desto heller der Farbwert, wobei natürlich auch andere Zuordnungen denkbar sind. Danach wird φ ein Stück verändert und wieder werden alle Absorptionen gemessen und umgewandelt. Alle Ergebnisse werden danach hintereinander zu einem einzigen Bild zusammengefügt, dies ist das *Sinogramm*.

Einige Abbildungen sollen die Vorgangsweise verdeutlichen:



Originalbild



p

Die beiden Punkte im linken Bild wurden aus allen Winkeln $\varphi \in [0^\circ; 360^\circ]$ gescannt² und die gewonnenen Helligkeitsinformationen Schicht für Schicht übereinander aufgetragen. Es ist deutlich zu erkennen, dass es zwei Positionen gibt, bei denen die Punkte direkt hintereinander gelegen haben.

²Oft reicht auch das Intervall $[0^\circ; 180^\circ]$ aus.

9.2 Inverse Radon Transformation

Die eigentliche Kunst besteht darin, aus den erhaltenen Sinogrammen wieder das Originalbild zu rekonstruieren. In der Praxis soll ein Blick in das Innere des Objekts geworfen werden können, wir kennen also das Original gar nicht. Startpunkt sind die Messergebnisse des Computertomographen, die als Rohdaten vorliegen. Aus diesen Daten muss mit Hilfe der *Inversen Radontransformation* das Aussehen des Objekts berechnet werden.

Radon hat im Jahr 1917 gezeigt, dass durch die Kenntnis *aller* Linienintegrale eine exakte Rekonstruktion möglich ist, also keine Information verloren geht. In der Praxis kann zumindest eine ausreichend gute Approximation erreicht werden. Das Rekonstruktionsproblem wird durch das *Fourier-Scheiben-Theorem* gelöst.

Eine detaillierte Herleitung kann hier nicht gegeben werden, da wir die notwendige *2D-Fourier-Transformation* nicht kennengelernt haben. Wir werden dennoch eine kurze Herleitung betrachten und das Endergebnis präsentieren.

Wir beginnen mit einem *festen* Winkel φ und unterwerfen unsere Funktion $g(p; \varphi)$ einer einfachen Fourier-Transformation. Dazu bezeichne $G(\omega, \varphi)$ die Fourier-Transformierte von $g(p; \varphi)$. In symbolischer Schreibweise

$$g(p; \varphi) \circ \longrightarrow G(\omega; \varphi)$$

$$\begin{aligned} G(\omega; \varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(p; \varphi) \cdot e^{-i\omega p} dp \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x; y) \cdot \delta(x \cos(\varphi) + y \sin(\varphi) - p) dx dy \right] \cdot e^{-i\omega p} dp \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x; y) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x \cos(\varphi) + y \sin(\varphi) - p) \cdot e^{-i\omega p} dp dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x; y) \cdot e^{-i\omega(x \cos(\varphi) + y \sin(\varphi))} dx dy \end{aligned}$$

Wir substituieren $u = \omega \cos(\varphi)$ und $v = \omega \sin(\varphi)$.

$$G(\omega; \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x; y) \cdot e^{-i(ux+vy)} dx dy$$

Die letzte Gleichung ist eine 2D-Fourier-Transformation der Originalfunktion $f(x; y)$ entlang der Geraden $ux + vy = 0$.

Betrachten wir die erste und letzte Zeile unserer Rechnung, so können wir das *Fourier-Scheiben-Theorem* wie folgt formulieren:

Die 1D-Fourier-Transformierte $G(\omega; \varphi)$ der Projektion $g(p; \varphi)$ beschreibt die 2D-Fourier-Transformierte $F(u, v)$ von $f(x; y)$ entlang der Geraden mit Winkel φ durch den Ursprung.

Somit ergibt sich ein möglicher Lösungsweg um von der Radon-Transformierten (den Rohdaten des Computertomographen) zurück zur Funktion $f(x; y)$ (Originalbild) zu kommen.

Wir bilden von allen Projektionen die (eindimensionalen) Fourier-Transformierten und tragen die Werte auf der zu φ gehörenden Geraden auf. Dadurch erhalten wir laufend Funktionswerte von $F(u, v)$.

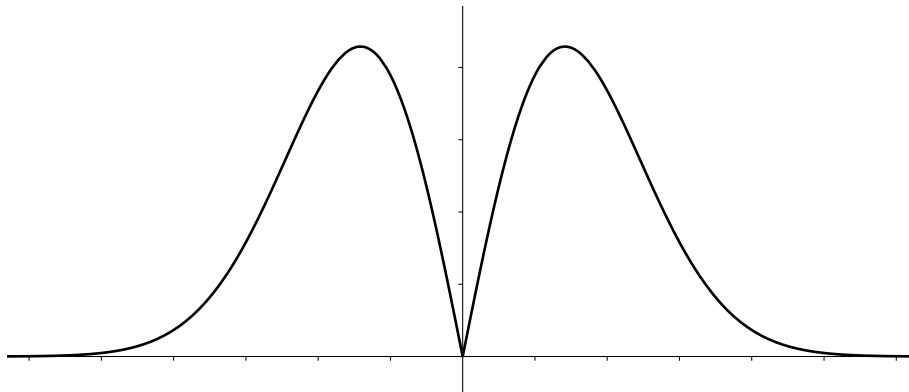
Durch eine anschließende *inverse* 2D-Fourier-Transformation von $F(u, v)$ können wir $f(x; y)$ berechnen.

In der praktischen Anwendung ergibt sich leider ein weiteres Problem. Im Fourierraum von $F(u, v)$ liegen in Ursprungsnähe die Projektionen besonders dicht, dort schneiden sich alle Geraden. Dadurch werden die tiefen Frequenzen künstlich verstärkt, was bei der Rücktransformation beachtet werden muss. Das Bild hat deutlich sichtbare Unschärfen. Rechnung getragen wird diesem Effekt dadurch, dass vor der Rücktransformation *gefiltert* wird. Das bedeutet in diesem Fall einfach, dass die Funktion noch mit dem Term $|\omega|$ multipliziert wird.

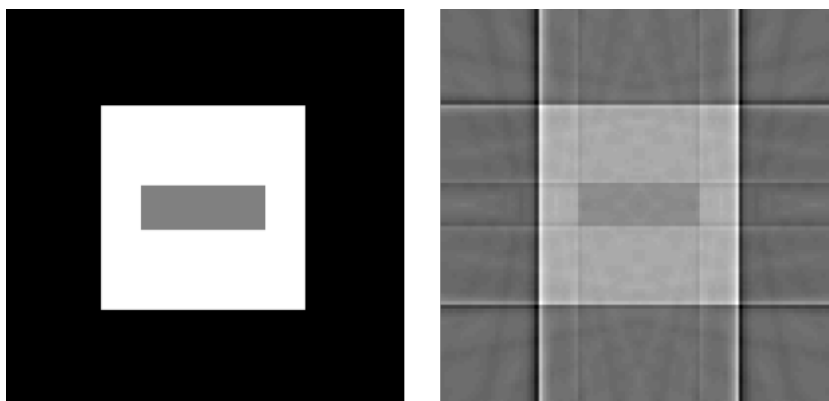
Ohne die genaue Herleitung wiederzugeben sei das Endergebnis festgehalten:

$$f(x; y) = \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| \cdot G(\omega; \varphi) \cdot e^{i\omega p} d\omega \tag{9.2}$$

Auch an dieser Stelle hat sich in der Praxis gezeigt, dass der korrekte mathematische Weg manchmal nicht gangbar ist. Der Faktor $|\omega|$ wächst unbeschränkt und kann bei numerischen Berechnungen (wir haben ja immer nur endliche viele Messwerte zur Verfügung) Probleme bereiten. Daher wird die Betragsfunktion oft durch Funktionen ersetzt, die nach dem Ansteigen wieder abklingen. Ein Beispiel einer solchen Funktion zeigt die nachfolgende Abbildung.



Die Rekonstruktion des Bildes erfolgt mit Gleichung (9.2), bzw. in der Praxis mit einer endlichen Summe anstelle des Integrals. Ein Pixel $(x; y)$ erhält die Summe aller Werte, die in den gefilterten Projektionen gespeichert sind. Wurden nur wenige Projektionen durchgeführt, so ist die Rekonstruktion dementsprechend schlecht, wie die nachfolgende Gegenüberstellung zeigt.



Index

Symbole

L^2	125
Metrik	124
Norm	124

A

Äquipotentialfläche	59
Amplitudenspektrum	119
Anfangswertproblem (AWP)	80

B

Bildfunktion	128
Bogenlänge	52

D

Darstellung	
Explizit	6
Implizit	6
Differenzialgleichung	78, 79
Dirac-Folge	137
Diracsche Deltafunktion	136
Divergenz	68

F

Faltung	146
Fourier-Transformation	146
Laplace-Transformation	157
Filterung	177
Flächenfunktion	5
Fourier-Reihe	111
Fourier-Scheiben-Theorem	176
Fourier-Transformation 2D	176
Fourier-Transformierte	128
Fourierkoeffizient	111, 114
Funktionaldeterminante	45
Funktionen	
Delta δ	136
Heaviside	8, 133
Kippschwingung	159
Sägezahn	159
Sigma σ	133
Signum	8

G

Gauß-Integral	37
geränderte Hesse Matrix	29
Gradient	60

Gradientenfeld	72
Grundschwingung	119

H

Höhenlinie	27
Hauptnormaleneinheitsvektor	55
Hauptvektor	99

I

Implizites Differenzieren	20
---------------------------------	----

J

Jacobi-Matrix	14
---------------------	----

K

Kardioide	37
konservativ (Kraftfeld)	75
Krümmung	54
Krümmungsradius	56
Kugelkoordinaten	41, 44
Kurve	47
Ableitung	49
Bogenlänge	52
Krümmung	54, 56
Krümmungsradius	56
Parametrisierung nach Bogenlänge	52
Kurvenintegral erster Art	64, 65
Kurvenintegral zweiter Art	73, 74

L

Lagrange-Verfahren	28
Laplace-Transformierte	153
Linienintegral erster Art	65
Linienintegral zweiter Art	74

N

Nabla Operator	60
Niveaufläche	63
Numerische Lösung	166

O

Oberschwingung	119
Originalfunktion	128

P

Partielle Ableitung	11
Partielle Differenzierbarkeit	11
Partikuläre Lösung	89

Phasendiagramm..... 109
 Phasenspektrum..... 128
 Polarkoordinaten..... 44
 Polarkoordinaten - Integration..... 35
 Polygonzug..... 166
 Potential..... 73
 Potentialfeld..... 75

Q

quadratintegrierbare Funktionen..... 125
 quadratisches Mittel..... 124

R

Radon-Transformation..... 173
 Radon-Transformierte..... 175
 Randwertproblem(RWP)..... 81
 Rechteckimpuls..... 135
 Richtungsableitung..... 13, 62
 Rotation..... 70
 Runge-Kutta-Verfahren 4.Ordnung..... 168

S

Satz
 Fubini..... 33
 Schwarz..... 12
 Schrittweite..... 166, 167
 Skalares Kurvenintegral..... 65
 Skalarfeld..... 59
 Skalarpotential..... 73
 Spektrum..... 128
 Stetige Funktion..... 7
 Stetigkeit..... 7
 Streckenzug..... 166
 Streckenzugverfahren nach Euler..... 166
 Systeme von Differenzialgleichungen..... 95

T

Tangenteneinheitsvektor..... 54
 Tangentialebene..... 16
 Totale Ableitung..... 14
 Totales Differenzial..... 18
 Trajektorie..... 109
 Transformationssatz..... 44
 Trigonometrisches Polynom..... 123

V

Vektorfeld..... 67
 Vektorpotential..... 72
 Verallgemeinerte Ableitung..... 141

W

Wirbelfeld..... 72

Z

Zykloide..... 53
 Zylinderkoordinaten..... 40, 44