Übung 7

S1) Drücken Sie das in kartesischen Koordinaten $(x; y; z)$ gegebene Feld

$$\vec{F}(x; y; z) = \begin{pmatrix} \frac{y}{x} \\ z + xy \\ \frac{-x^2 - y^2}{(1+z)^2} \end{pmatrix}$$

in Zylinderkoordinaten $(r; \varphi; z)$ aus. Vereinfachen Sie so weit wie möglich!

Lösung:

$$\vec{F}(x; y; z) = \begin{pmatrix} \frac{r\sin(\varphi)}{r\cos(\varphi)} \\ z + r^2\sin(\varphi)\cos(\varphi) \\ \frac{-r^2}{(1+z)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tan(\varphi) \\ z + r^2\sin(\varphi)\cos(\varphi) \\ -\frac{r^2}{(1+z)^2} \end{pmatrix}$$

S2) Bestimmen Sie die Divergenz des Gradienten der Funktion $\phi(x; y; z) = (x-1)^2 + (y-5)^2 + z^2$.

Lösung:

$$grad(\phi) = \begin{pmatrix} 2x - 2 \\ 2y - 10 \\ 2z \end{pmatrix}$$

$$div(grad(\phi)) = 2 + 2 + 2 = 6$$

S3) Berechnen Sie den Gradienten von ϕ und anschließend seinen Betrag im Punkt P.

$$\phi(x; y; z) = 10x^2y^3 - 5xyz^2 \qquad P(1; -1; 2)$$

Welche Bedeutung haben der Gradient und seine Länge?

Lösung:

$$grad(\phi) = \begin{pmatrix} 20xy^3 - 5yz^2 \\ 30x^2y^2 - 5xz^2 \\ -10xyz \end{pmatrix}$$

$$grad(\phi)|_P = \begin{pmatrix} -20 + 20 \\ 30 - 20 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix} = 10 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\left| 10 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = 10\sqrt{5}$$

S4) Zeigen Sie die Wirbelfreiheit des Feldes

$$\vec{v} = \frac{-1}{\sqrt{x^2+y^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Lösung: Wir untersuchen die Gleichung $\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial x}$ auf Richtigkeit.

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{x\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}2y}{x^2+y^2} = \frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{y\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}2x}{x^2+y^2} = \frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Somit ist die Wirbelfreiheit des Feldes gezeigt.

S5) Bestimmen sie die Rotation von $\vec{F} = \begin{pmatrix} xy^3 \\ 2xy^2z \\ x^2y - z^2 \end{pmatrix}$ im Punkt $P(1;2;1)$.

Lösung: Hier wird (willkürlich) die Determinantenformel zur Berechnung der Rotation gewählt.

$$rot(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy^3 & 2xy^2z & x^2y - z^2 \end{vmatrix}$$

$$= x^2\vec{e}_x + 0\vec{e}_y + 2y^2z\vec{e}_z - (3xy^2\vec{e}_z + 2xy\vec{e}_y + 2xy^2\vec{e}_x) = \begin{pmatrix} x^2 - 2xy^2 \\ -2xy \\ 2y^2z - 3xy^2 \end{pmatrix}$$

$$rot(\vec{F})|_P = \begin{pmatrix} 1-8 \\ -4 \\ 8-12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

S6) Wie sind die Parameter a und b zu wählen, damit die Rotation des Vektorfeldes

$$\vec{F}(x;y;z) = \begin{pmatrix} 2xz^2 + y^3z \\ axy^2z \\ 2x^2z + bxy^3 \end{pmatrix}$$

überall verschwindet?

Lösung: Wir verwenden diesmal die Berechnung über das Kreuzprodukt.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2xz^2 + y^3z \\ axy^2z \\ 2x^2z + bxy^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3bxy^2 - axy^2 \\ -4xz - by^3 + 4xz + y^3 \\ ay^2z - 3y^2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy^2(3b-a) \\ y^3(1-b) \\ y^2z(a-3) \end{pmatrix}$$

Damit sehen wir direkt, dass die Wahl $b = 1$ und $a = 3$ den Nullvektor $\vec{0}$ erzeugt.
Alternativ hätte man auch die Bedingungen

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \qquad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} \qquad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}$$

verwenden und das entstandene Gleichungssystem lösen können.

S7) Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass $\vec{F}$ ein Gradientenfeld ist (ohne ein Potential ϕ konkret zu bestimmen!).

b) Bestimmen Sie ein zugehöriges *Potential* ϕ.

Lösung:

a) Wir verwenden die Äquivalenz zur Rotationsfreiheit für zweidimensionale Vektorfelder. Die $z-$Koordinate ist in unserem Fall sowieso konstant 0.

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = 0 = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

Damit ist $\vec{F}$ ein Gradientenfeld.

b) Wir müssen jene Funktion $\phi(x; y)$ finden, deren partielle Ableitungen den Komponenten des Feldes entsprechen. Dazu integrieren wir zuerst F_x.[1]

$$\int F_x dx = x^2 + c(y)$$

Damit ist bis auf den Ausdruck $c(y)$ die Funktion bestimmt. Diesen erhalten wir durch Differenziation und anschließendem Gleichsetzen mit F_y.

$$\frac{\partial(x^2 + c(y))}{\partial y} = c'(y)$$
$$c'(y) = F_y = 2y$$
$$c(y) = \int 2y\ dy = y^2 + c$$

Insgesamt hat das gesuchte Potential die Gestalt

$$\phi(x; y) = x^2 + y^2 + c$$

S8) Geben Sie bei den folgenden beiden Feldern an, wo sich Quellen und Senken befinden ($a \in \mathbb{R}$).

$$\vec{F}(x; y; z) = \begin{pmatrix} x - a \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \vec{G}(x; y; z) = \begin{pmatrix} a \\ -x \\ z^2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$div(\vec{F}) = 1 + 1 + 1 = 3$$

In jedem Punkt befindet sich eine Quelle.

$$div(\vec{G}) = 0 + 0 + 2z = 2z$$

Es befinden sich in allen Punkten $(x; y; z > 0)$ Quellen und in allen Punkten $(x; y; z < 0)$ Senken. In der $xy-$Ebene ist das Feld quellenfrei.

[1] Wir hätten natürlich auch F_y nehmen können.

S9) Welche Werte muss $c \in \mathbb{R}$ annehmen, damit das Feld

$$\vec{F}(x;y;z) = \begin{pmatrix} -c \cdot x \\ 2c^3 \cdot y - c^2 \cdot y \\ \sqrt{c} \end{pmatrix}$$

quellenfrei wird?

Lösung:

$$\begin{aligned} div(\vec{F}) &= -c + 2c^3 - c^2 + 0 \\ 0 &= -c + 2c^3 - c^2 \\ 0 &= c(2c^2 - c - 1) \\ c_1 &= 0 \\ 0 &= 2c^2 - c - 1 \\ c_{2,3} &= \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} \\ c_2 &= 1 \\ c_3 &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Für $c \in \left\{0; 1; -\frac{1}{2}\right\}$ wird das Feld quellenfrei.