FACHHOCHSCHULE
WIENER NEUSTADT
Austrian Network for Higher Education

Mathematatik 1 - Vorlesung

LÖSUNG

Haupttermin am 15.02.2018

Name: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Beachten Sie bitte folgende Punkte:

- Schreiben Sie nicht mit Bleistift oder roter Farbe.
- Skizzen können mit Bleistift angefertigt werden.
- Geben Sie *alle* Rechenschritte ausführlich an.
- Streichen Sie ungültige Lösungen durch. Es darf pro Beispiel nur eine Ausarbeitung angegeben werden, die dann auch bewertet wird.
- Sie dürfen einen einfachen, nicht programmierbaren Taschenrechner verwenden.
- Weitere Hilfsmittel wie Formelsammlung, Skriptum etc. sind nicht gestattet.

Aufgabe Nummer	1	2	3	4	5	**Gesamt**
Punktzahl	12	12	12	12	12	60
Davon erreicht						

1 Aufgabe [12 Punkte]

Im $\mathbb{R}^3$ sind die folgenden Unterräume gegeben.

$$U_1 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \colon 2x + y - z = 0\}$$
$$U_2 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \colon 3(x + 2y) + z = 0\}$$
$$U_3 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \colon x + y = 0\}$$

a) Geben Sie aus jedem der drei Räume einen Vektor an.

b) In welchem dieser Unterräume liegt die Gerade $g \colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$, d.h. für welchen Raum U gilt $g \subset U$?

c) Ist g auch ein Unterraum? Begründung!

d) Berechnen Sie $U_1 \cap U_2$ und begründen Sie, warum es sich dabei wieder um einen Unterraum handelt.

Lösung:

a) Da es sich um Unterräume handelt, könnte man bei allen drei Räumen den Nullvektor $\vec{0}$ angeben. Dieser erfüllt offensichtlich die Gleichungen.
Etwas kreativer werden alle Koordinaten bis auf eine frei gewählt und die letzte dann so berechnet, dass die Gleichung erfüllt ist, z.B:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in U_1 \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \in U_2 \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} \in U_3$$

b) Wir setzen die Gerade in alle drei Ebenengleichungen ein.

$$\begin{aligned} 2(-2-5t)+1+t-9t &= 0 \\ -4-10t+1-8t &= 0 \\ -3-18t &= 0 \\ t &= \frac{-1}{6} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 3(-2-5t+2(1+t))+9t &= 0 \\ 3(-2-5t+2+2t)+9t &= 0 \\ -9t+9t &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} -2-5t+1+t &= 0 \\ -1-4t &= 0 \\ t &= \frac{-1}{4} \end{aligned}$$

Die Gerade g liegt ganz in U_2.

c) Eine Gerade ist dann auch ein Unterraum, wenn sie durch den Ursprung geht, also den Nullvektor enthält.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-5t \\ 1+t \\ 9t \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{pmatrix} \frac{-2}{5} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix}$$

Der Nullvektor ist nicht in der Geraden enthalten, es handelt sich um keinen Unterraum.

d)

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 0 \\ 3(x + 2y) + z &= 0 \\ 5x + 7y &= 0 \\ y &= \frac{-5}{7}x \end{aligned}$$

Wähle $x = t$ so folgt $y = \frac{-5}{7}t$ und $z = 2t - \frac{5}{7}t = \frac{9}{7}t$. Der Schnitt von Unterräumen ist wieder ein Unterraum, konkret die Gerade (durch den Ursprung)

$$\vec{x} = t \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

$\boxed{2}$ **Aufgabe** [12 Punkte]

Das Skalarprodukt $\langle f, g \rangle$ für zwei Funktionen am Interval $[0; 1]$ sei durch das übliche Integral

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f \cdot g \, dx$$

definiert.

a) Berechnen Sie $\langle x, \mathrm{e}^{x^2} \rangle$.
b) Berechnen Sie die Norm $\|f\|$ für $f(x) = \sqrt{x} \cdot \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$ durch partielle Integration[1].
c) Berechnen Sie den Abstand $d(g, h)$ mit $g(x) = x^2 + 1$ und $h(x) = 2x$ mit der vom SKP induzierten Metrik.

Lösung:

a)

$$\langle x, \mathrm{e}^{x^2} \rangle = \int_0^1 x \, \mathrm{e}^{x^2} \, dx \underbrace{=}_{u=x^2} \int_0^1 x \, \mathrm{e}^u \, \frac{du}{2x} = \left[\frac{1}{2} \mathrm{e}^u \right]_0^1 = \frac{\mathrm{e} - 1}{2}$$

b)

$$\begin{aligned} \|f\|^2 = \left\| \sqrt{x} \cdot \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \right\|^2 &= \int_0^1 \left(\sqrt{x} \cdot \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \right)^2 dx = \int_0^1 x \cdot \mathrm{e}^x \, dx = [x \, \mathrm{e}^x]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^x \, dx \\ &= \mathrm{e} - 0 - [\mathrm{e}^x]_0^1 = \mathrm{e} - \mathrm{e} + 1 = 1 \\ \|f\| &= \sqrt{1} = 1 \end{aligned}$$

c)

$$d(g, h) = \|g - h\| = \left\| x^2 + 1 - 2x \right\| = \sqrt{\int_0^1 (x^2 - 2x + 1)^2 \, dx} = \sqrt{\frac{1}{5}}$$

---

[1] $\int f \cdot g \, dx = F \cdot g - \int F \cdot g' dx$

3 **Aufgabe** [12 Punkte]

Gegeben sei die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass die Zahl $\lambda_1 = 3$ ein Eigenwert von M ist.

b) Geben Sie den Eigenraum zum Eigenwert λ_1 an.

c) Berechnen Sie die restlichen Eigenwerte.

Lösung:

a) Wir berechnen einfach alle Eigenwerte (das ist hier leicht möglich) und haben damit auch Punkt c) erledigt.

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda) - 0 = 0$$

Aus der Faktorisierung können wir direkt die Eigenwerte $1, 2$ und 3 ablesen.

b)

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \\ 3z \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2x + z &= 3x \\ 3y &= 3y \\ y + z &= 3z \end{aligned}$$

Wir erhalten die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} z - x = 0 &\iff z = x \\ y - 2z = 0 &\iff y = 2z \end{aligned}$$

Mit $x = t$ erhalten wir den Eigenraum $\vec{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) Siehe Punkt a).

4 Aufgabe [12 Punkte]

Berechnen Sie die zweiten Ableitungen der Funktionen.

$$a)\ f_1(x) = x \cdot \sin(x^2) \qquad b)\ f_2(x) = \ln\left(\frac{1}{x^2}\right) \qquad c)\ f_3(x) = \mathrm{e}^{3x^2+3} + 2\sin(4x)$$

Lösung:

a)

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x \cdot \sin(x^2) \\ f_1'(x) &= \sin(x^2) + 2x^2\cos(x^2) \\ f_1''(x) &= 2x\cos(x^2) + 4x\cos(x^2) - 4x^3\sin(x^2) = 6x\cos(x^2) - 4x^3\sin(x^2) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \ln\left(\frac{1}{x^2}\right) = \ln(1) - \ln(x^2) = 0 - 2\ln(x) = -2\ln(x) \\ f_2'(x) &= -2\frac{1}{x} = \frac{-2}{x} \\ f_2''(x) &= -2(-1)x^{-2} = \frac{2}{x^2} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} f_3(x) &= \mathrm{e}^{3x^2+3} + 2\sin(4x) \\ f_3'(x) &= 6x\,\mathrm{e}^{3x^2+3} + 8\cos(4x) \\ f_3''(x) &= 6\,\mathrm{e}^{3x^2+3} + 36x^2\,\mathrm{e}^{3x^2+3} - 32\sin(4x) \end{aligned}$$

5 Aufgabe [12 Punkte]

a) Berechnen Sie das Taylorpolynom dritten Grades der Funktion $f(x) = 2\cos(x)$ an der Stelle $x_0 = \frac{\pi}{2}$ mit der Formel

$$T_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

b) Berechnen Sie das Konvergenzintervall[2] der Potenzreihe $p(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(x-1)^k}{2^k}$.

Lösung:

a)

$$\begin{array}{llll} f(x) = 2\cos(x) & f'(x) = -2\sin(x) & f''(x) = -2\cos(x) & f'''(x) = 2\sin(x) \\ f(x_0) = 0 & f'(x_0) = -2 & f''(x_0) = 0 & f'''(x_0) = 2 \end{array}$$

$$T_3(f) = 0 - 2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 0 + \frac{2}{3!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 = -2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3$$

b)

$$r = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{2^k}}{\frac{1}{2^{k+1}}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{2^{k+1}}{2^k}\right| = 2$$

Mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ sehen wir, dass noch die Randpunkte $x = -1$ und $x = 3$ zu untersuchen sind.

$$p(-1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 \pm \ldots \text{divergent}$$

$$p(3) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2)^k}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots \text{divergent}$$

Das Konvergenzintervall ist somit $(-1; 3)$.

[2] $r = \lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$