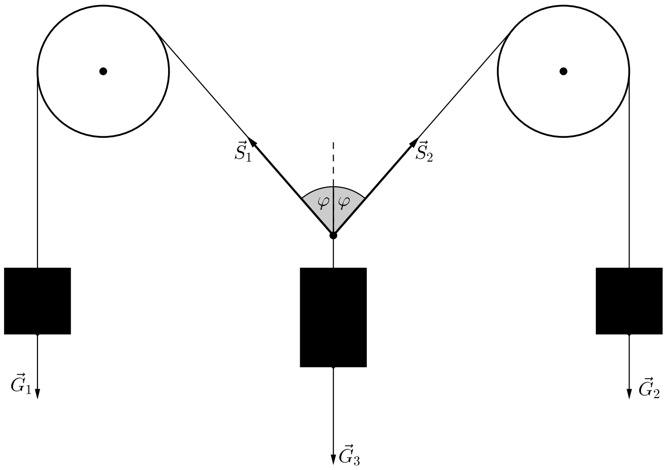
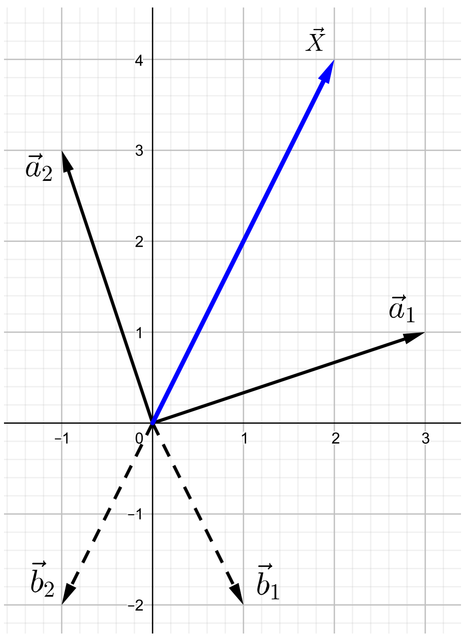
Übung 2 - Lösung
(Vektorraum / Basis)

S1) Gegeben sei ein belastetes Rollensystem.



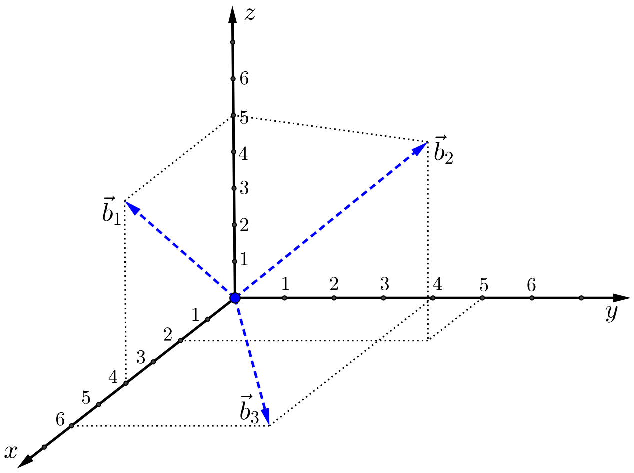
Für die wirkenden Kräfte gelte $|\vec{G}_1| = |\vec{G}_2| = 2mg$ und $|\vec{G}_3| = 3mg$. Wie groß ist der Winkel φ im Gleichgewichtszustand?
(*Lösung:* $\varphi \approx 41,4°$)

S2) In der nachfolgenden Abbildung sind zwei verschiedene Basen, $A = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ und $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$, der Ebene $\mathbb{R}^2$ eingezeichnet.



Berechnen Sie die Koordinaten des Vektors $\vec{X}$ in den Basen A und B.
(*Lösung:* $\vec{X}_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{X}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$)

S3)



a) Berechnen Sie die Koordinaten des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ in der Basis $B = \{\vec{b}_1; \vec{b}_2; \vec{b}_3\}$.

b) Zeigen Sie, dass für $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ die Mengen

$$U_1 = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \colon \vec{x} = \lambda_1 \vec{b}_1\right\} \qquad\qquad U_2 = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \colon \vec{x} = \lambda_1 \vec{b}_1 + \lambda_2 \vec{b}_2\right\}$$

Vektorräume sind.[1] Geben Sie eine geometrische Interpretation der Räume U_1 und U_2.

c) Begründen Sie, warum es sich bei

$$V_1 = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \colon \vec{x} = \lambda_1 \vec{b}_1 + \lambda_2 \vec{b}_2 + \vec{v} \;\text{ mit }\; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\right\}$$

um *keinen* Vektorraum handelt (mit $\vec{v}$ aus Punkt a)).

(*Lösung: a)* $\vec{v}_B = \begin{pmatrix} -\frac{77}{95} \\ \frac{39}{95} \\ \frac{14}{19} \end{pmatrix}_B$)

S4) Im $\mathbb{R}^2$ verwenden wir jetzt die Basis $B = \left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$. In dieser Basis sind folgende Vektoren gegeben:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_B \qquad\qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}_B$$

Geben Sie diese Vektoren in der kanonischen Basis an.
(*Lösung:* $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}$; $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 19 \end{pmatrix}$)

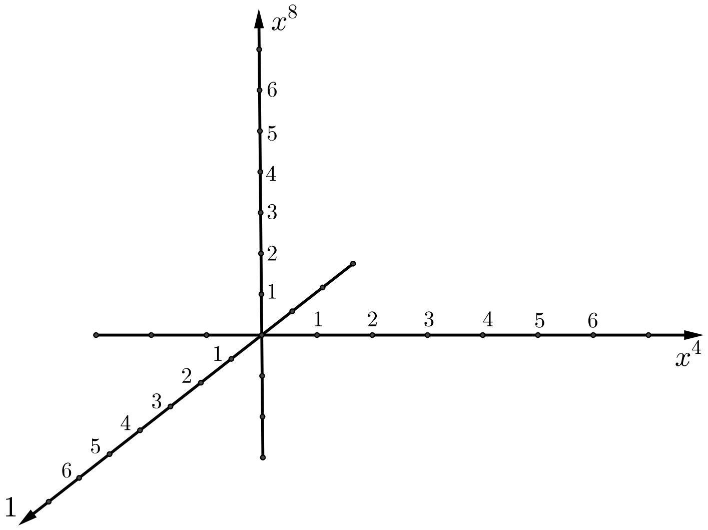
S5) Gegeben sei der Vektorraum

$$V = \left\{f(x) \colon f(x) = ax^8 + by^4 + c \;\text{ mit }\; a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$$

a) Skizzieren Sie die Vektoren

$$p(x) = 3x^8 + 4x^4 + 1 \qquad q(x) = 4x^8 - 2x^4 \qquad h(x) = 5x^8 + 5$$

[1] Es darf verwendet werden, dass $\mathbb{R}^3$ ein Vektorraum ist.



b) Zeigen Sie, dass $B = \{p(x); q(x); h(x)\}$ eine Basis des Raums V bildet.

c) Stellen Sie $f(x) = 6x^8 + 2x^4 + 2$ in der Basis B dar.

(*Lösung: c)* $f(x) = \frac{4}{5}p(x) + \frac{3}{5}q(x) + \frac{6}{25}h(x)$)

S6) (*Eindeutigkeit der Koordinaten bzgl. einer Basis*)
Sei $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\}$ eine Basis des Vektorraums V. So kann ein Element $\vec{v} \in V$ als Linearkombination

$$\vec{v} = \lambda_1\vec{b}_1 + \lambda_2\vec{b}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{b}_n$$

dargestellt werden.
Beweisen Sie, dass die Koordinaten (Koeffizienten) λ_i durch die Basisvektoren $\vec{b}_i$ eindeutig bestimmt sind.
(Hinweis: Gehen Sie von einer weiteren Darstellungsmöglichkeit mit Koordinaten μ_i aus und zeigen Sie $\lambda_i = \mu_i$)

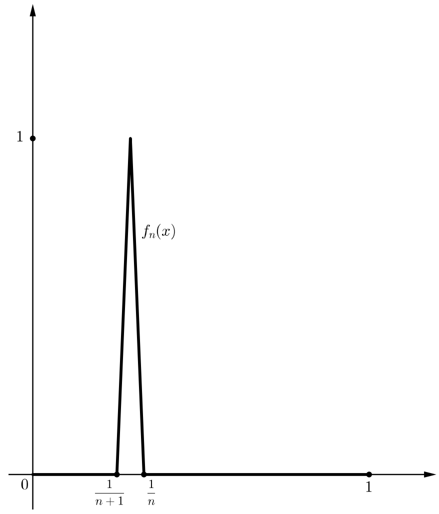
R1) Sei $V = C([0;1])$ der Vektorraum der stetigen reellwertigen Funktionen auf dem Intervall $[0;1]$. Gegeben seien für $n = 1, 2, \ldots$ die (Dach-)Funktionen $f_n \in V$ mit

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & , x < \frac{1}{n+1} \\ 0 & , x > \frac{1}{n} \\ 2n(n+1)x - 2n & , \frac{1}{n+1} \leq x \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) \\ -2n(n+1)x + 2n + 2 & , \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) < x \leq \frac{1}{n} \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie den Graphen dieser Funktionen.

b) Zeigen Sie, dass $dim(V) = \infty$ mit Hilfe der Dachfunktionen.

(*Lösung:*
a)



b) Es ist zu zeigen, dass für beliebiges $k \in \mathbb{N}$ *die Menge* $\{f_1, \ldots, f_k\}$ *linear unabhängig ist.*)

R2) Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Addition und skalare Multiplikation werden komponentenweise definiert.

a) $V_1 = \left\{(a_n) \colon \lim_{n \to \infty} (a_n) = 0\right\}$ *b)* $V_2 = \left\{(a_n) \colon \lim_{n \to \infty} (a_n) = 1\right\}$

c) $V_3 = \{(a_n) \colon \forall n \in \mathbb{N} \colon a_n \neq 1\}$ *d)* $V_4 = \{(a_n) \colon \exists n_0 \in \mathbb{N} \colon a_n = a_{n+1}$ für $n \geq n_0\}$

i) Geben Sie aus jeder Menge zwei Elemente an.

ii) Prüfen Sie die Abgeschlossenheit der Rechenoperationen nach.

(*Lösung: ii) a) Beide Rechenoperationen abgeschlossen. b) und c) Keine Rechenoperation abgeschlossen. d) Beide Rechenoperationen abgeschlossen.*)