$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^1 = 3^{1-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

also ist der Induktionsanfang gezeigt.
Induktionsvoraussetzung:
Es gelte die Behauptung für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$.
Induktionsschritt $n \mapsto n+1$:

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{n+1} \\
= \quad &\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{n} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
\overset{IV}{=} &\, 3^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
= &\, 3^{n-1} \begin{pmatrix} 1+(-1)(-1)+1 & -1-1-1 & 1+(-1)(-1)+1 \\ -1-1-1 & (-1)(-1)+1+(-1)(-1) & -1-1-1 \\ 1+(-1)(-1)+1 & -1-1-1 & 1+(-1)(-1)+1 \end{pmatrix} \\
= &\, 3^{n-1} \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ -3 & 3 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} = 3^{n-1} \cdot 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 3^{(n+1)-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Dies ist die Behauptung für $n+1$, also folgt mittels Induktionsprinzip die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 18

Sei V eine Menge. V heißt reeller Vektorraum oder auch $\mathbb{R}$-Vektorraum, falls auf V eine Addition $'+'$ und eine skalare Multiplikation $'\cdot'$ definiert ist, sodass $v_1 + v_2 \in V$ und $r \cdot v_1 \in V$ für alle $v_1,\ v_2 \in V$ und $r \in \mathbb{R}$ erfüllt ist und weiterhin
(V1) $(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$,
(V2) es existiert ein $0_V \in V$ mit $0_V + v_1 = v_1 + 0_V = v_1$,
(V3) es existiert ein $-v_1$ mit $v_1 + (-v_1) = (-v_1) + v_1 = 0_V$,
(V4) $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$,
(S1) $r_1 \cdot (v_1 + v_2) = r_1 \cdot v_1 + r_1 \cdot v_2$,
(S2) $(r_1 + r_2)v_1 = r_1 \cdot v_1 + r_2 \cdot v_1$,
(S3) $(r_1 r_2) \cdot v_1 = r_1 \cdot (r_2 \cdot v_1)$,
(S4) $1 \cdot v_1 = v_1$
für alle $r_1,\ r_2 \in \mathbb{R}$ und $v_1,\ v_2,\ v_3 \in V$ gilt.

(a) Bildet die Menge der reellen $(n \times m)$-Matrizen mit den aus der Vorlesung eingeführten Verknüpfungen $'+'$ und $'\cdot'$ (skalare Multiplikation) einen $\mathbb{R}$-Vektorraum?

(b) Bildet die Menge der reellen $(n \times n)$-Diagonalmatrizen $\{\mathrm{diag}(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}\}$ mit den aus der Vorlesung eingeführten Verknüpfungen $'+'$ und $'\cdot'$ (skalare Multiplikation) einen $\mathbb{R}$-Vektorraum?

Lösung:
Beide Mengen bilden mit den aus der Vorlesung bekannten Verknüpfungen $\mathbb{R}$-Vektorräume. Rechenregeln siehe Vorlesung.

— Aufgaben zum 2. Kapitel (Lineare Gleichungssysteme, Gauß-Verfahren) —

Aufgabe 19

Übersetzen Sie jeweils die Textaufgabe in ein lineares Gleichungssystem und geben Sie die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix an.

a) Vor drei Jahren war Monika dreimal so alt wie Peter. In vier Jahren ist Monika nur noch doppelt so alt wie Peter. Wie alt sind Peter und Monika?

b) Drei normale Brötchen kosten so viel wie zwei Körnerbrötchen. Fünf normale Brötchen sind um 13 Cent teurer als drei Körnerbrötchen. Wie viel kosten normale Brötchen und Körnerbrötchen?

c) Drei Metalllegierungen A, B und C bestehen aus jeweils unterschiedlichen Gewichtsanteilen an X, Y und Z, die der folgenden Tabelle entnommen werden können:

	X	Y	Z
A	5 %	55 %	40 %
B	10 %	70 %	20 %
C	20 %	20 %	60 %

Nun soll durch Mischen von A, B und C eine Legierung hergestellt werden, in der der Anteil von X 12 %, der Anteil von Y 52 % und der Anteil von Z 36 % beträgt. Es werden 500 g dieser Legierung benötigt. Welche Mengen von A, B und C müssen dazu in die Mischung gegeben werden?

Lösung:
a) Das Gleichungssystem lautet

$$m - 3 = 3(p-3)$$
$$m + 4 = 2(p+4),$$

in Standardform

$$m - 3p = -6$$
$$m - 2p = 4.$$

Die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix zu diesem LGS ist $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -6 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.
Es ist zu beachten, dass eine andere Benennung der Variablen sowie eine Vertauschung der Gleichungen zu unterschiedlichen Koeffizientenmatrizen führen können (Vertauschung von Zeilen und Spalten ist möglich).

b) Das Gleichungssystem lautet

$$3n = 2k$$

$$5n = 3k + 13,$$

in Standardform

$$3n - 2k = 0$$

$$5n - 3k = 13.$$

Die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix ist $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 5 & -3 & 13 \end{pmatrix}$.
Es ist zu beachten, dass eine andere Benennung der Variablen sowie eine Vertauschung der Gleichungen zu unterschiedlichen Koeffizientenmatrizen führen können (Vertauschung von Zeilen und Spalten ist möglich).

c) Das Gleichungssystem lautet

$$0{,}05a + 0{,}1b + 0{,}2c = (0{,}12 \cdot 500 =)\ 60$$

$$0{,}55a + 0{,}7b + 0{,}2c = (0{,}52 \cdot 500 =)\ 260$$

$$0{,}4a + 0{,}2b + 0{,}6c = (0{,}36 \cdot 500 =)\ 180,$$

und die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix ist $\begin{pmatrix} 0{,}05 & 0{,}1 & 0{,}2 & 60 \\ 0{,}55 & 0{,}7 & 0{,}2 & 260 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}6 & 180 \end{pmatrix}$.
Es ist zu beachten, dass eine andere Benennung der Variablen sowie eine Vertauschung der Gleichungen zu unterschiedlichen Koeffizientenmatrizen führen können (Vertauschung von Zeilen und Spalten ist möglich).

Aufgabe 20

Geben Sie jeweils ein (möglichst einfaches) Beispiel eines linearen Gleichungssystems mit drei Gleichungen und drei Unbekannten an,

a) das genau eine Lösung hat,

b) das unendliche viele Lösungen hat,

c) das keine Lösung hat.

Lösung:
Zum Beispiel

$$\text{a)}\quad \begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 2 \\ x_3 &= 3 \end{aligned} \qquad \text{b)}\quad \begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_1 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned} \qquad \text{c)}\quad \begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_1 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 21

Es seien folgende lineare Gleichungssysteme gegeben. Geben Sie jeweils die zugehörige Koeffizientenmatrix und erweiterte Koeffizientenmatrix an:

a)

$$\begin{aligned} 3x_1 - 7x_2 + x_3 + 2x_4 &= 3 \\ 5x_1 + 4x_3 - x_4 &= 0 \\ -3x_2 + 5x_3 + x_4 - 1 &= 1 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_3 + x_2 &= 0 \\ x_3 + 4x_1 - 3x_2 &= 0 \\ 6x_2 + x_1 + 3x_3 - 1 &= -1 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 5x_4 - x_1 - x_5 + x_2 - 2 &= 0 \end{aligned}$$

Lösung:
Die Koeffizientenmatrix beziehungsweise erweiterte Koeffizientenmatrix lauten

a)

$$\begin{pmatrix} 3 & -7 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \text{ beziehungsweise } \begin{pmatrix} 3 & -7 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix} \text{ beziehungsweise } \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} \text{ beziehungsweise } \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 22

Geben Sie jeweils an, durch welche elementare Zeilenoperation die Matrix A in die Matrix B transformiert werden kann. Welche Elementarmatrix realisiert diese Zeilenoperation durch Linksmultiplikation?

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Lösung:
a) Vertauschen der ersten und dritten Zeile, also $V_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

b) Multiplikation der zweiten Zeile mit $\frac{1}{2}$, also $M_2(\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

c) Addition des Dreifachen der dritten Zeile zur ersten, also $A_{13}(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 23

Geben Sie für jede der folgenden Matrizen an, ob sie in Zeilenstufenform ist.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung:
In Zeilenstufenform sind alle Matrizen außer B und D.

Aufgabe 24

Transformieren Sie die nachfolgenden Matrizen jeweils durch elementare Zeilenoperationen in eine Matrix in Zeilenstufenform.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 6 \\ -1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 10 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -12 & 13 \\ 1 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 10 & 0 & 13 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 11 \\ 4 & 1 & 12 & -1 & 11 \\ 3 & 0 & 6 & 1 & 15 \end{pmatrix}.$$

Lösung:
Die Matrix A formt man wie folgt um:

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{21}(2)} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{31}(3)} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{32}(-\frac{2}{3})} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{M_1(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{M_2(\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix B wird wie folgt umgeformt:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 6 \\ -1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{V_{12}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & 2 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{31}(2)} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 2 & -8 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{32}(-2)} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{M_1(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{M_3(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bei der Umformung der Matrix C bietet es sich an, zunächst die erste Zeile durch 2 zu teilen, um einfacher handhabbare Zahlen zu erhalten:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -12 & 13 \\ 1 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{M_1(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -12 & 13 \\ 1 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 4 & -12 & 13 \\ 1 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{41}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 4 & -12 & 13 \\ 0 & -1 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{A_{32}(-4)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{42}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{V_{34}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{M_3(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix D schließlich wird wie folgt umgeformt:

$$\begin{pmatrix}1&2&10&0&13\\0&1&4&1&11\\4&1&12&-1&11\\3&0&6&1&15\end{pmatrix} \xrightarrow{A_{31}(-4)} \begin{pmatrix}1&2&10&0&13\\0&1&4&1&11\\0&-7&-28&-1&-41\\3&0&6&1&15\end{pmatrix} \xrightarrow{A_{41}(-3)} \begin{pmatrix}1&2&10&0&13\\0&1&4&1&11\\0&-7&-28&-1&-41\\0&-6&-24&1&-24\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{A_{32}(7)} \begin{pmatrix}1&2&10&0&13\\0&1&4&1&11\\0&0&0&6&36\\0&-6&-24&1&-24\end{pmatrix} \xrightarrow{A_{42}(6)} \begin{pmatrix}1&2&10&0&13\\0&1&4&1&11\\0&0&0&6&36\\0&0&0&7&42\end{pmatrix} \xrightarrow{A_{43}(-\frac{6}{7})} \begin{pmatrix}1&0&2&-2&-9\\0&1&4&1&11\\0&0&0&6&36\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{M_3(\frac{1}{6})} \begin{pmatrix}1&0&2&-2&-9\\0&1&4&1&11\\0&0&0&1&6\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Aufgabe 25

Lösen Sie die in Aufgabe 19 aufgestellten linearen Gleichungssysteme mit dem Gauß-Verfahren.

Lösung:

a) $m = 24$ und $p = 10$ (Umformung: $\left(\begin{smallmatrix}1&-3&-6\\1&-2&4\end{smallmatrix}\right) \to \left(\begin{smallmatrix}1&-3&-6\\0&1&10\end{smallmatrix}\right)$)

b) $n = 26$ und $k = 39$ (Umformung: $\left(\begin{smallmatrix}3&-2&0\\5&-3&13\end{smallmatrix}\right) \to \left(\begin{smallmatrix}1&-\frac{2}{3}&0\\0&1&39\end{smallmatrix}\right)$)

c) $a = 100$ und $b = 250$ sowie $c = 150$ (Umformung: $\dashrightarrow \left(\begin{smallmatrix}1&2&4&1200\\11&14&4&5200\\4&2&6&1800\end{smallmatrix}\right) \dashrightarrow \left(\begin{smallmatrix}1&2&4&1200\\0&1&5&1000\\0&0&1&150\end{smallmatrix}\right)$)

Aufgabe 26

Lösen Sie jeweils das lineare Gleichungssystem mit dem Gauß-Verfahren.

a)
$$\begin{aligned} x + 3y + z &= 1\\ 3x + 9y + 4z &= 5\\ x + 3y + 2z &= 3 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 6x_3 - x_4 &= 0\\ -x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 &= 0\\ 3x_1 - 2x_2 + 10x_3 - 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 1\\ 2y + 2z &= 0\\ 2x + 5y + 3z &= 1 \end{aligned}$$

Lösung:

a) $\{(-3p-1 \quad p \quad 2)^{\mathrm{T}} \mid p \in \mathbb{R}\}$, b) $\{(-2p \quad 2p-q \quad p \quad q)^{\mathrm{T}} \mid p, q \in \mathbb{R}\}$, c) $\emptyset$

Aufgabe 27

Geben Sie für jede Matrix aus Aufgabe 23 an, ob sie in reduzierter Zeilenstufenform ist.

Lösung:

In reduzierter Zeilenstufenform sind genau die Matrizen C, E und F.

Aufgabe 28

Transformieren Sie die Matrizen aus Aufgabe 24 jeweils durch elementare Zeilenoperationen in eine Matrix in reduzierter Zeilenstufenform.

Lösung:

Die Matrix A formt man zunächst wie in Aufgabe 24 in Zeilenstufenform um und fährt dann wie folgt fort:

$$\begin{pmatrix}-1&-2&1\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix} \xrightarrow{M_2(\frac{1}{3})} \begin{pmatrix}-1&-2&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} \xrightarrow{A_{12}(-1)} \begin{pmatrix}-1&-2&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} \xrightarrow{M_1(-1)} \begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Die Zeilenstufenmatrix zu B aus Aufgabe 24 wird wie folgt weiter umgeformt:

$$\begin{pmatrix}-1&1&-3&2\\0&1&-2&6\\0&0&0&2\end{pmatrix} \xrightarrow{M_3(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix}-1&1&-3&2\\0&1&-2&6\\0&0&0&1\end{pmatrix} \xrightarrow{A_{23}(-6)} \begin{pmatrix}-1&1&-3&2\\0&1&-2&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{A_{13}(-2)} \begin{pmatrix}-1&1&-3&0\\0&1&-2&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \xrightarrow{A_{12}(-1)} \begin{pmatrix}-1&0&-1&0\\0&1&-2&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \xrightarrow{M_1(-1)} \begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&-2&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Die Zeilenstufenmatrix zu C aus Aufgabe 24 formt man wie folgt weiter um:

$$\begin{pmatrix}1&2&0&-1\\0&1&-3&3\\0&0&2&8\\0&0&0&1\end{pmatrix} \xrightarrow{A_{34}(-8)} \begin{pmatrix}1&2&0&-1\\0&1&-3&3\\0&0&2&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \xrightarrow{A_{24}(-3)} \begin{pmatrix}1&2&0&-1\\0&1&-3&0\\0&0&2&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{A_{41}(1)} \begin{pmatrix}1&2&0&0\\0&1&-3&0\\0&0&2&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \xrightarrow{M_3(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix}1&2&0&0\\0&1&-3&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \xrightarrow{A_{23}(3)} \begin{pmatrix}1&2&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \xrightarrow{A_{12}(-2)} \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Die Zeilenstufenmatrix zu D aus Aufgabe 24 wird schließlich wie folgt weiter umgeformt:

$$\begin{pmatrix}1&0&2&-2&-9\\0&1&4&1&11\\0&0&0&6&36\\0&0&0&0&0\end{pmatrix} \xrightarrow{M_3(\frac{1}{6})} \begin{pmatrix}1&0&2&-2&-9\\0&1&4&1&11\\0&0&0&1&6\\0&0&0&0&0\end{pmatrix} \xrightarrow{A_{23}(-1)} \begin{pmatrix}1&0&2&-2&-9\\0&1&4&0&5\\0&0&0&1&6\\0&0&0&0&0\end{pmatrix} \xrightarrow{A_{13}(2)} \begin{pmatrix}1&0&2&0&3\\0&1&4&0&5\\0&0&0&1&6\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Aufgabe 29

Lösen Sie jeweils das lineare Gleichungssystem mit dem Gauß-Verfahren.

a)
$$\begin{aligned} x+y-z&=1\\ 2x+6y+3z&=8\\ x-7y-4z&=3 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 2x+8y&=0\\ 6x+24y+3z&=0\\ 2x+8y+z&=0 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x+2z&=1\\ x+y+z&=3\\ 3x+y+5z&=6 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 2x_1+x_2+5x_3+x_4&=3\\ x_1+x_2+3x_3&=1\\ 2x_1+2x_2+6x_3+x_4&=5 \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} x_1+2x_3+3x_4&=0\\ 2x_1+x_2+5x_3+5x_4&=0\\ -x_1+x_2-2x_3+x_4&=0\\ 2x_2+x_3+4x_4&=0 \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} 2x_1+2x_2+8x_4&=0\\ x_1+x_2+x_3+6x_4&=0\\ 2x_3+4x_4+x_5&=0\\ x_1+x_2+2x_3+8x_4&=0 \end{aligned}$$

Lösung:

a) $\{(4 \quad -1 \quad 2)^{\mathrm{T}}\}$, b) $\{(-4p \quad p \quad 0)^{\mathrm{T}} \mid p \in \mathbb{R}\}$, c) $\emptyset$,

d) $\{(-2p-1 \quad -p+2 \quad p \quad 3)^{\mathrm{T}} \mid p \in \mathbb{R}\}$, e) $\{(0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^{\mathrm{T}}\}$,

f) $\{(-p-4q \quad p \quad -2q \quad q \quad 0)^{\mathrm{T}} \mid p,q \in \mathbb{R}\}$.

Aufgabe 30

Bestimmen Sie jeweils alle Parameter a, b, c, $d \in \mathbb{R}$, für die die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ax^3+bx^2+cx+d$ die gewünschten Bedingungen erfüllt.

a) Es gilt $f(1)=1$ und $f(2)=2$ sowie $f(-1)=5$.

b) Es gilt $f(1)=1$ und $f'(1)=-1$ sowie $f(-1)=1$.

c) Die Gerade mit der Gleichung $y=3x$ ist die Wendepunkttangente des Graphen von f, und die Wendestelle ist 1.

Lösung:

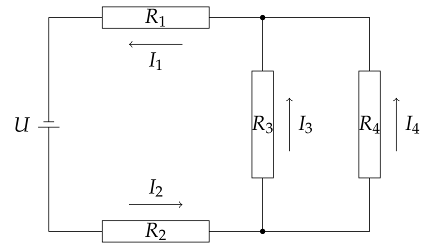
a) Gleichungssystem:
$$\begin{aligned} a+b+c+d&=1\\ 8a+4b+2c+d&=2\\ -a+b-c+d&=5 \end{aligned}$$
Lösung: $a=\frac{p}{2}-1$ und $b=-p+3$ sowie $c=-\frac{p}{2}-1$ und $d=p$ für beliebiges $p\in\mathbb{R}$

b) Gleichungssystem:
$$\begin{aligned} a+b+c+d&=1\\ 3a+2b+c&=-1\\ -a+b-c+d&=1 \end{aligned}$$
Lösung: $a=p-\frac{3}{2}$ und $b=-p+1$ sowie $c=-p+\frac{3}{2}$ und $d=p$ für beliebiges $p\in\mathbb{R}$

c) Dass die Gerade $y=3x$ ein Tangente an den Graphen von f an der Stelle $x=1$ ist, ist äquivalent zu $f(1)=3\cdot 1=3$ und $f'(1)=3$. Die Bedingung, dass 1 die Wendestelle ist, ist äquivalent zu $f''(1)=0$ und $f'''(1)=6a\neq 0$ (d.h. $a\neq 0$). Somit hat man das Gleichungssystem
$$\begin{aligned} a+b+c+d&=3\\ 3a+2b+c&=3\\ 6a+2b&=0 \end{aligned}$$
sowie die Zusatzbedingung $a\neq 0$.
Lösung: $a=-p$ und $b=3p$ sowie $c=-3p+3$ und $d=p$ für beliebiges $p\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Aufgabe 31

Gegeben sei das folgende Gleichstromnetz:



In einem Gleichstromnetz gelten die Kirchhoffschen Regeln. Die *Knotenregel* besagt, dass in jedem Knoten im Netz die Summe der Ströme, deren Pfeil auf den Knoten hinweist, gleich der Summe der Ströme ist, deren Pfeil vom Knoten wegweist. Die *Maschenregel* besagt, dass, wenn man einen geschlossenen Weg durch das Netz läuft und dabei die Produkte $\pm R_k I_k$ an den durchlaufenen Widerständen aufsummiert (mit positivem Vorzeichen, wenn der Weg in Pfeilrichtung verläuft, und mit negativem Vorzeichen, wenn der Weg entgegen der Pfeilrichtung verläuft), man die Summe der Spannungen der Spannungsquellen auf diesem Weg erhält. Berechnen Sie mit diesen Regeln die Stromstärken in obigem Netz, wenn die Spannungsquelle 36 V hat und für die Widerstände $R_1=200\,\Omega$ sowie $R_2=400\,\Omega$ und $R_3=300\,\Omega$ sowie $R_4=200\,\Omega$ gilt.

Lösung:

Die Knotenregel liefert die Bedingungen $I_3+I_4=I_1$ (oberer Knoten) und $I_2=I_3+I_4$ (unterer Knoten), und aus der Maschenregel erhält man $R_2I_2+R_3I_3+R_1I_1=U$ (linke Masche gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen) sowie $R_4I_4-R_3I_3=0$ (rechte Masche gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen). Man hat also in Standardform (und ohne Einheiten) das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} I_1 - I_3 - I_4 &= 0 \\ I_2 - I_3 - I_4 &= 0 \\ 200I_1 + 400I_2 + 300I_3 &= 36 \\ -300I_3 + 200I_4 &= 0 \end{aligned}$$

Lösung: $I_1 = 0{,}05$ und $I_2 = 0{,}05$ sowie $I_3 = 0{,}02$ und $I_4 = 0{,}03$ (jeweils in Ampere)

Aufgabe 32

Untersuchen Sie jeweils, ob das gegebene lineare Gleichungssystem keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen hat.

a) $$\begin{aligned} 2x + y - 5z &= 10 \\ 2x + 4y + z &= 1 \\ 2y + 4z &= -6 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x + 3y + 5z &= 0 \\ x + y + z &= 0 \\ x + 5y + 15z &= 0 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 5 \\ 4x - 5y + 4z &= 14 \\ 2x - 2y + 3z &= 14 \end{aligned}$$

Lösung:

a) Zeilenstufenform hat (bei drei Variablen) zwei Treppenstufen, keine davon in der letzten Spalte $\Rightarrow$ unendlich viele Lösungen

b) Zeilenstufenform hat (bei drei Variablen) drei Treppenstufen, keine davon in der letzten Spalte $\Rightarrow$ genau eine Lösung

c) Zeilenstufenform hat Treppenstufe in letzter Spalte $\Rightarrow$ keine Lösung

Aufgabe 33

Untersuchen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ auf Lösbarkeit.

a) $$\begin{aligned} x + ay + 3z &= a \\ y - az &= 1 \\ x + (a-2)y + (2a+3)z &= -a^2 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x + z &= 0 \\ x + y + (a+1)z &= 2 \\ 3x + y + (a+3)z &= a+2 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} 2x + 4y &= -2a \\ x + (a+2)y &= 1 - a \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} x + a^2y &= 1 \\ a^2x + y &= a \end{aligned}$$

Lösung:

a) lösbar genau für $a = 1$ oder $a = -2$, b) lösbar genau für $a = 0$,
c) lösbar genau für $a \neq 0$, d) lösbar genau für $a \neq -1$

Aufgabe 34

Untersuchen Sie jeweils in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$, ob das gegebene lineare Gleichungssystem keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen hat.

a) $$\begin{aligned} 2x + 4y + az &= 5 \\ 3x + (a+5)y + z &= 7 \\ x + 2y + az &= 3 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} ax + y + z &= a \\ ax + (a+2)y + (2a+1)z &= a-2 \\ (a^2+a)y + (3a^2-1)z &= -2 \end{aligned}$$

Lösung:

a) für $a = 0$ unlösbar, für $a = 1$ unendlich viele Lösungen, sonst genau eine Lösung

b) für $a = -1$ unlösbar, für $a \in \{0, 1\}$ unendlich viele Lösungen, sonst genau eine Lösung

Aufgabe 35

Bestimmen Sie aus dem Ergebnis von Aufgabe 26 a) die Lösungsmenge von

$$\begin{aligned} x + 3y + z &= 0 \\ 3x + 9y + 4z &= 0 \\ x + 3y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

(ohne erneutes Lösen eines Gleichungssystems).

Lösung:
$\{(-3p \quad p \quad 0)^{\mathrm{T}} \mid p \in \mathbb{R}\}$

Aufgabe 36

Untersuchen Sie jeweils für die gegebene Matrix A, ob das Gleichungssystem $A \cdot x = y$ für alle $y \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ lösbar ist.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 5 \\ 2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 4 & -2 & 6 & 7 \\ -4 & 4 & -6 & -12 \end{pmatrix}$, c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Lösung:

a) Zeilenstufenmatrix zu A hat genau 2 Treppenstufen $\Rightarrow$ das Gleichungssystem ist nicht für alle $y \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ lösbar

b) Zeilenstufenmatrix zu A hat genau 3 Treppenstufen $\Rightarrow$ das Gleichungssystem ist für alle $y \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ lösbar

c) Matrix A hat nur zwei Spalten $\Rightarrow$ Zeilenstufenmatrix zu A hat höchstens 2 Treppenstufen $\Rightarrow$ Gleichungssystem nicht für alle $y \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ lösbar

Aufgabe 37

Untersuchen Sie jede der folgenden Matrizen auf Invertierbarkeit und bestimmen Sie gegebenenfalls die inverse Matrix.

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{b)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & -7 & 13 \end{pmatrix}, \quad \text{c)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 7 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}, \quad \text{d)} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{e)} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -10 \end{pmatrix}, \quad \text{f)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

Die Matrizen in b) und e) sind nicht invertierbar. Die Inversen der übrigen Matrizen sind:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}, \quad \text{c)} \begin{pmatrix} 12 & -2 & 9 \\ -28 & 5 & -21 \\ -17 & 3 & -13 \end{pmatrix}, \quad \text{d)} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}, \quad \text{f)} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 38

Berechnen Sie möglichst geschickt die inverse Matrix zu jeder der folgenden Matrizen.

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{b)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad \text{c)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

a) Wir erkennen die Matrix als Produkt der drei Elementarmatrizen, die zur ersten Zeile einer beliebigen anderen Matrix mit vier Zeilen das Zweifache der zweiten Zeile bzw. das Dreifache der dritten Zeile bzw. das Vierfache der vierten Zeile addieren. Die inversen Matrizen dieser Elementarmatrizen sind durch die Elementarmatrizen gegeben, welche die entsprechende Subtraktion durchführen. Ihr Produkt ist

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Bei Diagonalmatrizen genügt es, die Kehrwerte der Diagonaleinträge zu bilden. Man erhält die inverse Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

c) Das Produkt von zwei Matrizen mit der vorgegebenen Verteilung von Nulleinträgen ist wieder eine Matrix von dieser Gestalt (möglicherweise mit noch mehr Nulleinträgen). Die (4×4)-Einheitsmatrix ist ebenfalls von dieser Gestalt, so dass es sinnvoll ist, die inverse Matrix unter solchen Matrizen zu suchen. Wenn B der untere rechte (2×2)-Block der gegebenen Matrix A ist und I_k die $(k \times k)$-Einheitsmatrix, dann erhalten wir durch Invertieren von B tatsächlich eine Matrix C mit $A \cdot C = I_4 = C \cdot A$:

$$\begin{pmatrix} I_2^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 39

Geben Sie alle $a \in \mathbb{R}$ an, für die die folgenden Matrizen invertierbar sind

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

Lösung:

Die Matrix A ist für alle $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ invertierbar, da die Blockmatrix $(A\ E_2)$ in diesem Fall mit Hilfe von Gauß in die Form $(E_2\ A^{-1})$ transformiert werden kann.
Die Matrix B ist für alle $a \in \mathbb{R}$ invertierbar, da auch hier die Blockmatrix $(B\ E_2)$ mit Hilfe von Gauß in die Form $(E_2\ B^{-1})$ transformiert werden kann.
Die Matrix C ist für alle $a \in \mathbb{R}\backslash\{1, -1\}$ invertierbar, denn

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{V_{23}}{\to} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{A_{32}(-a)}{\to} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-a^2 & 0 & 1 & -a \end{array}\right)$$

Im nächsten Schritt müssten wir die dritte Zeile mit $\frac{1}{1-a^2}$ multiplizieren. Hierfür müssen wir $a \neq \pm 1$ fordern (im Fall $a = \pm 1$ erhalten wir eine Nullzeile auf der linken Seite, sodass die Matrix nicht invertierbar ist). Unter der Zusatzvoraussetzung $a \neq \pm 1$ folgt dann

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-a^2 & 0 & 1 & -a \end{array}\right) \overset{M_3(\frac{1}{1-a^2})}{\to} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{1-a^2} & \frac{-a}{1-a^2} \end{array}\right) \overset{A_{23}(-a)}{\to}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-a}{1-a^2} & 1+\frac{a^2}{1-a^2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{1-a^2} & \frac{-a}{1-a^2} \end{array}\right) \overset{A_{13}(-3)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & \frac{-3}{1-a^2} & \frac{3a}{1-a^2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-a}{1-a^2} & 1+\frac{a^2}{1-a^2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{1-a^2} & \frac{-a}{1-a^2} \end{array}\right) \overset{A_{12}(-2)}{\longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{-3+2a}{1-a^2} & -2+\frac{3a-2a^2}{1-a^2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-a}{1-a^2} & 1+\frac{a^2}{1-a^2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{1-a^2} & \frac{-a}{1-a^2} \end{array}\right)$$

Da wir auf der linken Seite die Einheitsmatrix erhalten, ist C nun für alle $a \neq \pm 1$ invertierbar.

Aufgabe 40

Es seien A, B und C invertierbare Matrizen, deren Produkt $A \cdot B \cdot C$ definiert ist. Folgern Sie aus der Formel $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ eine Formel, die $(A \cdot B \cdot C)^{-1}$ durch A^{-1}, B^{-1} und C^{-1} ausdrückt.

Lösung:
Mit dem Assoziativgesetz für die Matrixmultiplikation folgt

$$(A \cdot B \cdot C)^{-1} = ((A \cdot B) \cdot C)^{-1} = C^{-1} \cdot (A \cdot B)^{-1} = C^{-1} \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = C^{-1} \cdot B^{-1} \cdot A^{-1}.$$

Dieses Produkt ist definiert, da A, B und C quadratische Matrizen vom gleichen Format sind. Probe: $(C^{-1} \cdot B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot B \cdot C) = I$ und $(A \cdot B \cdot C) \cdot (C^{-1} \cdot B^{-1} \cdot A^{-1}) = I$.

Aufgabe 41

Folgern Sie aus Aufgabe 13, dass für alle invertierbaren reellen (2×2)-Matrizen A gilt: $(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$.

Lösung:
Es sei $B = A^{-1}$. Dann erfüllt die Matrix B

$$A \cdot B = I \qquad \text{und} \qquad B \cdot A = I,$$

wobei I die (2×2)-Einheitsmatrix ist. Transponieren beider Gleichungen liefert wegen $(A \cdot B)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} \cdot A^{\mathrm{T}}$ (siehe Aufgabe 13):

$$B^{\mathrm{T}} \cdot A^{\mathrm{T}} = I^{\mathrm{T}} = I \qquad \text{und} \qquad A^{\mathrm{T}} \cdot B^{\mathrm{T}} = I^{\mathrm{T}} = I.$$

Also ist $B^{\mathrm{T}} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$ die inverse Matrix zu A^{T}.

Aufgabe 42

Seien $A, A' \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Ist die Matrix A' ungleich der Nullmatrix und gilt $A \cdot A' = 0_{m,m}$ oder $A'A = 0_{m,m}$, so ist die Matrix A nicht invertierbar (Satz aus der Vorlesung).

(a) Zeigen Sie mit Hilfe dieser Aussage, dass die folgenden Matrizen nicht invertierbar sind:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(b) Schließen Sie mit obiger Aussage und mit Hilfe des Aufgabenteils (a):

(i) Besitzt $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ eine Nullzeile, so ist A nicht invertierbar.

(ii) Besitzt $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ eine Nullspalte, so ist A nicht invertierbar.

(iii) Besitzt $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ eine Zeile, die sich als Linearkombination der anderen Zeilen schreiben lässt, so ist A nicht invertierbar.

(iv) Besitzt $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ eine Spalte, die sich als Linearkombination der anderen Spalten schreiben lässt, so ist A nicht invertierbar.

Lösung:
Falls der Beweis der Aussage nicht in der Vorlesung gezeigt wurde:
Angenommen A wäre invertierbar, dann existiert A^{-1} mit $AA^{-1} = A^{-1}A = E_m$. Dann liefert aber

$$A' = E_m A' = (A^{-1}A)A' = A^{-1}(AA') = A^{-1}0_{m,m} = 0_{m,m}$$

im Fall $AA' = 0_{m,m}$ beziehungsweise

$$A' = A'E_m = A'(AA^{-1}) = (A'A)A^{-1} = 0_{m,m}A^{-1} = 0_{m,m}$$

im Fall $A'A = 0_{m,m}$ einen Widerspruch zur Voraussetzung $A' \neq 0_{m,m}$.

(a) Wähle $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dann ist $A' \neq 0_{3,3}$ und erfüllt

$$A'A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also kann A nicht invertierbar sein.
Wähle $B' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dann ist $B' \neq 0_{3,3}$ und erfüllt

$$BB' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also kann B nicht invertierbar sein.

Wähle $C' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dann ist $C' \neq 0_{3,3}$ und erfüllt

$$C'C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also kann C nicht invertierbar sein.

Wähle $D' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dann ist $D' \neq 0_{3,3}$ und erfüllt

$$D'D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also kann D nicht invertierbar sein.

Wähle $E' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dann ist $E' \neq 0_{3,3}$ und erfüllt

$$EE' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also kann E nicht invertierbar sein.

(b) (i) Sei ohne Einschränkung der Allgemeinheit die erste Zeile von $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine Nullzeile (sonst multipliziere entsprechend zuerst mit V_{1i} von links) und wähle

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Dann gilt

$$A'A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} = 0_{m,m}.$$

Aus obiger Aussage folgt damit, dass A nicht invertierbar sein kann.

(ii) Sei ohne Einschränkung der Allgemeinheit die erste Spalte von $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine Nullspalte (sonst multipliziere entsprechend zuerst mit V_{1i} von rechts) und wähle

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Dann gilt

$$AA' = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = 0_{m,m}.$$

Aus obiger Aussage folgt damit, dass A nicht invertierbar sein kann.

(iii) Sei ohne Einschränkung der Allgemeinheit die erste Zeile von $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine Linearkombination der Zeilen 2 bis m (sonst multipliziere entsprechend zuerst mit V_{1i} von links). Dann existieren $c_i \in \mathbb{R}$, $2 \leqslant i \leqslant m$, mit

$$A_{1,-} = c_2 A_{2,-} + c_3 A_{3,-} + \cdots + c_m A_{m,-}.$$

Wähle nun

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -c_2 & -c_3 & \cdots & -c_m \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$A'A = \begin{pmatrix} 1 & -c_2 & \cdots & -c_m \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{k=2}^m c_k a_{k1} & \sum_{k=2}^m c_k a_{k2} & \cdots & \sum_{k=2}^m c_k a_{km} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} = 0_{m,m}.$$

Aus obiger Aussage folgt damit, dass A nicht invertierbar sein kann.

(iv) Sei ohne Einschränkung der Allgemeinheit die erste Spalte von $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine Linearkombination der Spalten 2 bis m (sonst multipliziere entsprechend zuerst mit V_{1i} von rechts). Dann existieren $c_i \in \mathbb{R}$, $2 \leqslant i \leqslant m$, mit

$$A_{-,1} = c_2 A_{-,2} + c_3 A_{-,3} + \cdots + c_m A_{-,m}.$$

Wähle nun

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -c_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -c_3 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -c_m & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$AA' = \begin{pmatrix} \sum_{k=2}^m c_k a_{1k} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \sum_{k=2}^m c_k a_{2k} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=2}^m c_k a_{mk} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -c_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -c_3 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -c_m & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = 0_{m,m}.$$

Aus obiger Aussage folgt damit, dass A nicht invertierbar sein kann.

Aufgabe 43

Prüfen Sie die folgenden Abbildungen auf Wohldefiniertheit, Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

(a) $\varphi : \mathbb{R}^{2\times 1} \to \mathbb{R}^{2\times 1}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$,

(b) $\varphi : \mathbb{R}^{3\times 1} \to \mathbb{R}^{3\times 1}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

(c) $\varphi : \mathbb{R}^{m\times 1} \to \mathbb{R}^{m\times 1}, x \mapsto Ax + b$ für eine invertierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ und ein beliebiges $b \in \mathbb{R}^{m\times 1}$.
Können Sie mit diesem Aufgabenteil die Aufgabenteile (a) und (b) schneller lösen?

Lösung:

(a) Für alle $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ liegt der Ausdruck $\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 + 6x_2 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^{2\times 1}$, also ist die Abbildung wohldefiniert. Um auf Injektivität bzw. Surjektivität zu untersuchen, muss geprüft werden, ob für jeden beliebigen Vektor $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ die Gleichung $\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ höchstens eine Lösung bzw. mindestens eine Lösung besitzt.

Die Abbildung ist nicht injektiv, denn es gilt

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

aber $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Weiterhin ist φ nicht surjektiv, denn es liegt zum Beispiel $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ nicht im Bild von φ, denn angenommen es existiert ein $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ mit

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 + 6x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 3(x_1 + 2x_2) \end{pmatrix},$$

dann müsste wegen der ersten Zeile bereits $x_1 + 2x_2 = 0$ gelten, damit ist aber auch die zweite Zeile der rechten Matrix Null, was zu einem Widerspruch führt. Also existiert kein $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ mit $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right)$. Da φ nicht injektiv und nicht surjektiv ist, kann φ auch nicht bijektiv sein.

(b) Für alle $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ liegt der Ausdruck

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 + 1 \\ x_2 + x_3 \\ 2x_3 + 1 \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{R}^{3\times 1}$, also ist die Abbildung wohldefiniert. Die Abbildung ist bijektiv, denn für jeden Vektor $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ ist die Gleichung

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_3 + 1 \\ x_2 + x_3 \\ 2x_3 + 1 \end{pmatrix} = \varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

d.h. das LGS

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= y_1 - 1 \\ x_2 + x_3 &= y_2 \\ 2x_3 &= y_3 - 1 \end{aligned}$$

stets eindeutig lösbar, wie man durch Lösen des LGS mit dem Gauß-Verfahren sieht. Da es stets lösbar ist, ist also jeder Vektor $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ im Bild der Abbildung φ (d.h. φ ist surjektiv), und da es stets nur eine Lösung gibt, gibt es keine zwei verschiedenen Vektoren, die auf den gleichen Vektor abgebildet werden (d.h. φ ist injektiv).

(c) Für alle $x \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ liegt der Ausdruck $\varphi(x) = Ax + b$ in $\mathbb{R}^{m\times 1}$, also ist die Abbildung wohldefiniert. Wir wollen zeigen, dass φ bijektiv ist. Dazu zeigen wir zunächst die Injektivität. Seien dazu $x,\ y \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ mit $\varphi(x) = \varphi(y) \Leftrightarrow Ax + b = Ay + b \Leftrightarrow A(x - y) = 0_{m,1}$. Da A invertierbar ist, besitzt das Gleichungssystem $A(x - y) = 0_{m,1}$ nur genau eine Lösung, nämlich $x - y = 0_{m,1}$. Daraus folgt aber direkt $x = y$, wodurch die Injektivität gezeigt ist. Für die Surjektivität sei $y \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ beliebig. Wählen wir $x = A^{-1}(y - b) \in \mathbb{R}^{m\times 1}$, so folgt

$$\varphi(x) = A(A^{-1}(y - b)) + b = (AA^{-1})(y - b) + b = E_m(y - b) + b = (y - b) + b = y.$$

Demnach ist φ auch surjektiv und damit ist unsere Behauptung bewiesen.
Mit diesem Wissen lässt sich Aufgabenteil (b) wesentlich schneller lösen, denn wir

sehen direkt, dass die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ invertierbar ist mit Inverser $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
Also muss nach diesem Aufgabenteil die Abbildung φ aus Aufgabenteil (b) bijektiv sein. Die Matrix in Aufgabenteil (a) ist offensichtlich nicht invertierbar, denn es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und mit Aufgabe 42 folgt, dass dann $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ nicht invertierbar sein kann. Somit lässt sich hier Aufgabenteil (c) nicht anwenden und wir können erst einmal keine Aussage über die Bijektivität treffen. Allerdings kann man mit mehr Aufwand auch zeigen, dass im Falle der Nicht-Invertierbarkeit von A die entsprechende Abbildung φ weder injektiv noch surjektiv ist.

— Aufgaben zum 4. Kapitel (Determinanten) —

Aufgabe 44

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen.

a) $\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -10 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Lösung:
a) 13, b) 0, c) 45, d) 36.

Aufgabe 45

Bestimmen Sie für alle mit $*$ markierten Einträge die Werte, die eine Matrix mit Determinante 0 definieren.

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ -4 & 2 & * \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & * \\ 1 & 1 & * \\ 2 & 2 & * \end{pmatrix}$.

Lösung:
a) -4, b) $\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 0 \}$ (von links nach rechts gelesen),
c) $\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 6y - 3z = 0 \}$ (von oben nach unten gelesen).

Aufgabe 46

Berechnen Sie möglichst geschickt die Determinanten der folgenden Matrizen.

a) $\begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 7 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 7 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$,

e) $\begin{pmatrix} 6 & 2 & -3 & 8 \\ 5 & -2 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 7 & -9 \end{pmatrix}$, f) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 9 \\ 1 & 1 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, g) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 7 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Lösung:
a) 0 (entwickle nach Nullzeile)

b) 14 (entwickle nach erster Zeile oder dritter Spalte)

c) -12 (nutze Dreiecksstruktur der Matrix aus)

d) 4 (nutze Dreiecksstruktur der Matrix aus)

e) 0 (entwickle nach Nullzeile)

f) 8 (nutze Blockstruktur der Matrix aus)

g) -28 (nutze Dreiecksstruktur der Matrix aus)

Aufgabe 47

Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass für alle $n \geqslant 2$ gilt

$$\det(A_n) = 1 - \sum_{k=2}^{n} b_k c_k \text{ mit } A_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_n \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_2 \\ c_n & c_{n-1} & \cdots & c_2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Lösung:
Induktionsanfang: $n = 2$
Es ist A_2 gegeben durch

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & b_2 \\ c_2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Daraus berechnen wir

$$\det(A_2) = 1 - b_2 c_2 = 1 - \sum_{k=2}^{2} b_k c_k.$$

Also stimmt die Behauptung für $n = 2$.
Induktionsvoraussetzung:
Die Behauptung gelte für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

Induktionsschluss: $n \mapsto n+1$
Es ist A_{n+1} gegeben durch

$$A_{n+1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{n+1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_2 \\ c_{n+1} & c_n & \cdots & c_2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}.$$

Wir entwicklen nach der ersten Spalte und erhalten

$$\det(A_{n+1}) = 1 \cdot \det\left(\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & b_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & b_2 \\ c_n & \cdots & c_2 & 1 \end{pmatrix}\right) + (-1)^{n+1+1} c_{n+1} \det\left(\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_{n+1} \\ 1 & \cdots & 0 & b_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & b_2 \end{pmatrix}\right).$$

Die erste auftretende Determinante ist nach Induktionsvoraussetzung gegeben durch

$$\det\left(\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & b_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & \cdots & 1 & b_2 \\ c_n & \cdots & c_2 & 1 \end{pmatrix}\right) \overset{IV}{=} 1 - \sum_{k=2}^{n} b_k c_k.$$

Bei der zweiten auftretenden Determinante entwicklen wir nun nach der ersten Zeile und erhalten

$$\det\left(\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_{n+1} \\ 1 & \cdots & 0 & b_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & b_2 \end{pmatrix}\right) = (-1)^{1+n} b_{n+1} \det\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}}_{E_{n-1}}\right) = (-1)^{n+1} b_{n+1}.$$

Zusammen erhalten wir

$$\begin{aligned} \det(A_{n+1}) &= 1 \cdot (1 - \textstyle\sum_{k=2}^{n} b_k c_k) + (-1)^{n+1+1} c_{n+1} \cdot (-1)^{n+1} b_{n+1} \\ &= 1 - \textstyle\sum_{k=2}^{n} b_k c_k + \underbrace{(-1)^{2n+3}}_{=-1} c_{n+1} b_{n+1} \\ &= 1 - \textstyle\sum_{k=2}^{n+1} c_k b_k. \end{aligned}$$

Dies ist die Behauptung für $n+1$ anstelle von n, sodass mit dem Induktionsprinzip nun die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, bewiesen ist.

Aufgabe 48

Die Spur einer Matrix ist definiert als die Summe ihrer Diagonaleinträge. Zeigen Sie, dass für alle 2×2-Matrizen A gilt

$$A^2 - \mathrm{Spur}(A) \cdot A + \det(A) \cdot E_2 = 0_{2,2}.$$

Lösung:
Wir setzen ein und berechnen

$$\begin{aligned} & A^2 - \mathrm{Spur}(A) \cdot A + \det(A) \cdot E_2 \\ = & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (ad-bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+dc & ad+d^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} a^2+bc-a^2-ad+ad-bc & ab+bd-ab-bd \\ ca+dc-ac-dc & cb+d^2-ad-d^2+ad-bc \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe 49

Zeigen Sie durch Rechnung mit zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit symbolischen Einträgen a_{ij} und b_{ij}:

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

Lösung:
Einerseits haben wir

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \det\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}\right) \\ &= (a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21})(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}) - (a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21})(a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}) \\ &= a_{11}b_{11}a_{21}b_{12} + a_{11}b_{11}a_{22}b_{22} + a_{12}b_{21}a_{21}b_{12} + a_{12}b_{21}a_{22}b_{22} \\ &\quad - a_{21}b_{11}a_{11}b_{12} - a_{21}b_{11}a_{12}b_{22} - a_{22}b_{21}a_{11}b_{12} - a_{22}b_{21}a_{12}b_{22} \\ &= a_{11}b_{11}a_{22}b_{22} + a_{12}b_{21}a_{21}b_{12} - a_{21}b_{11}a_{12}b_{22} - a_{22}b_{21}a_{11}b_{12} \end{aligned}$$

andererseits gilt

$$\begin{aligned} \det(A)\det(B) &= \det\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right)\det\left(\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\right) \\ &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) \\ &= a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} - a_{11}a_{22}b_{12}b_{21} - a_{12}a_{21}b_{11}b_{22} + a_{12}a_{21}b_{12}b_{21}. \end{aligned}$$

Damit stimmen beiden Seiten der Gleichung überein.

Aufgabe 50

Zeigen Sie durch Rechnung mit einer Matrix mit symbolischen Einträgen $a_{i,j}$: Eine (3×3)-Matrix und ihre transponierte Matrix haben die gleiche Determinante.

Lösung:
Nach Definition der Determinante einer (3×3)-Matrix gilt:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & a_{3,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{3,2} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3} \end{vmatrix} &= a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdot a_{3,3} + a_{2,1} \cdot a_{3,2} \cdot a_{1,3} + a_{3,1} \cdot a_{1,2} \cdot a_{2,3} \\
&\quad - a_{1,3} \cdot a_{2,2} \cdot a_{3,1} - a_{2,3} \cdot a_{3,2} \cdot a_{1,1} - a_{3,3} \cdot a_{1,2} \cdot a_{2,1} \\
&= a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdot a_{3,3} + a_{1,2} \cdot a_{2,3} \cdot a_{3,1} + a_{1,3} \cdot a_{2,1} \cdot a_{3,2} \\
&\quad - a_{3,1} \cdot a_{2,2} \cdot a_{1,3} - a_{3,2} \cdot a_{2,3} \cdot a_{1,1} - a_{3,3} \cdot a_{2,1} \cdot a_{1,2} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} .
\end{aligned}$$

Aufgabe 51

Zeigen Sie die folgenden Behauptungen durch Rechnung mit einer (3×3)-Matrix A mit symbolischen Einträgen $a_{i,j}$. (Es soll hier jeweils reichen, einen Fall zu behandeln.)

a) Vertauscht man zwei Zeilen (oder Spalten) der Matrix A, so ändert sich das Vorzeichen ihrer Determinante.

b) Multipliziert man alle Einträge einer Zeile (oder einer Spalte) von A mit einer reellen Zahl, so wird auch ihre Determinante mit dieser Zahl multipliziert.

c) Addition des r-fachen einer Zeile (bzw. Spalte) zu einer anderen Zeile (bzw. Spalte) von A für eine beliebige reelle Zahl r ändert die Determinante nicht.

Lösung:

a) Vertauschen der ersten beiden Zeilen und Entwickeln nach der ersten Spalte liefert:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} &= a_{2,1} \cdot \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} - a_{1,1} \cdot \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{3,1} \cdot \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{1,2} & a_{1,3} \end{vmatrix} \\
&= a_{2,1} \cdot \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} - a_{1,1} \cdot \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} - a_{3,1} \cdot \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \end{vmatrix} \\
= -\left(a_{1,1} \cdot \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} - a_{2,1} \cdot \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{3,1} \cdot \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{1,2} & a_{1,3} \end{vmatrix} \right) &= - \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} .
\end{aligned}$$

b) Multiplizieren aller Einträge der zweiten Spalte mit der reellen Zahl r liefert:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{1,1} & r \cdot a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & r \cdot a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & r \cdot a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} \quad &= \quad r \cdot (a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdot a_{3,3} + a_{1,2} \cdot a_{2,3} \cdot a_{3,1} + a_{1,3} \cdot a_{2,1} \cdot a_{3,2} \\
-a_{3,1} \cdot a_{2,2} \cdot a_{1,3} - a_{3,2} \cdot a_{2,3} \cdot a_{1,1} - a_{3,3} \cdot a_{2,1} \cdot a_{1,2}) \quad &= \quad r \cdot \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} .
\end{aligned}$$

c) Wir addieren das r-fache der dritten Zeile zur ersten. Entwickeln der Determinante dieser Matrix nach der ersten Zeile ergibt mit dem Distributivgesetz:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{1,1} + r \cdot a_{3,1} & a_{1,2} + r \cdot a_{3,2} & a_{1,3} + r \cdot a_{3,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} &= (a_{1,1} + r \cdot a_{3,1}) \cdot \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} \\
&\quad -(a_{1,2} + r \cdot a_{3,2}) \cdot \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} + (a_{3,1} + r \cdot a_{3,3}) \cdot \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{1,2} & a_{1,3} \end{vmatrix} \\
= a_{1,1} \cdot \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} - a_{1,2} \cdot \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{3,1} \cdot \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{1,2} & a_{1,3} \end{vmatrix} & \\
+ r \cdot a_{3,1} \cdot \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} - r \cdot a_{3,2} \cdot \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} + r \cdot a_{3,3} \cdot \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{1,2} & a_{1,3} \end{vmatrix} & \\
= \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} + r \cdot \begin{vmatrix} a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} , &
\end{aligned}$$

denn die Determinante einer Matrix, deren Zeilen linear abhängig sind, ist gleich Null (siehe Aufgabe 50).

Aufgabe 52

Berechnen Sie unter Benutzung des Ergebnisses von Aufgabe 44 d) und der Rechenregeln für Determinanten aus Aufgabe 51 die Determinanten der folgenden Matrizen.

a) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Lösung:

a) -36 (Matrix entsteht aus der ursprünglichen Matrix durch Vertauschen zweier Zeilen)

b) 36 (Matrix entsteht aus der ursprünglichen Matrix durch Zeilenaddition)

c) 72 (Matrix entsteht aus der ursprünglichen Matrix durch Zeilenmultiplikation)

d) 36 (Matrix entsteht aus der ursprünglichen Matrix durch Transponieren)

Aufgabe 53

Es sei $A = (v_1 \quad v_2 \quad v_3) \in \mathbb{R}^{3\times3}$ mit $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^{3\times1}$, und es gelte $\det(A) = 5$. Berechnen Sie mit Hilfe der Rechenregeln für Determinanten aus Aufgabe 51 und Aufgabe 50

a) $\det(-v_1 \quad 2v_2 \quad 3v_3)$,

b) $\det(v_3 \quad v_1 \quad v_2)$,

c) $\det(2v_1 \quad -v_3 \quad v_2)$,

d) $\det(v_1 + 2v_2 \quad v_2 + v_3 \quad v_3)$,

e) $\det(3v_1 - v_2 \quad v_1 + 2v_2 + v_3 \quad 3v_1 - v_3)$,

f) $\det(v_1 - v_2 \quad v_1 - v_2 \quad 7v_3)$.

Lösung:
a) Es gilt

$$\begin{aligned}\det(-v_1 \quad 2v_2 \quad 3v_3) &= (-1)\cdot\det(v_1 \quad 2v_2 \quad 3v_3) = (-1)\cdot 2\cdot\det(v_1 \quad v_2 \quad 3v_3)\\ &= (-1)\cdot 2\cdot 3\cdot\det(v_1 \quad v_2 \quad v_3) = (-1)\cdot 2\cdot 3\cdot 5 = -30.\end{aligned}$$

b) Es gilt

$$\det(v_3 \quad v_1 \quad v_2) = (-1)\cdot\det(v_1 \quad v_3 \quad v_2) = (-1)\cdot(-1)\cdot\det(v_1 \quad v_2 \quad v_3) = 5$$

c) Es gilt

$$\begin{aligned}\det(2v_1 \quad -v_3 \quad v_2) &= 2\cdot\det(v_1 \quad -v_3 \quad v_2) = 2\cdot(-1)\cdot\det(v_1 \quad v_3 \quad v_2)\\ &= 2\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot\det(v_1 \quad v_2 \quad v_3) = 2\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot 5 = 10.\end{aligned}$$

d) Es gilt $\det(v_1+2v_2 \quad v_2+v_3 \quad v_3) = \det(v_1+2v_2 \quad v_2 \quad v_3) = \det(v_1 \quad v_2 \quad v_3) = 5.$

e) Es gilt

$$\begin{aligned}&\det(3v_1-v_2 \quad v_1+2v_2+v_3 \quad 3v_1-v_3) = \det(3v_1-v_2 \quad 7v_1+v_3 \quad 3v_1-v_3)\\ &= \det(3v_1-v_2 \quad 10v_1 \quad 3v_1-v_3) = 10\det(3v_1-v_2 \quad v_1 \quad 3v_1-v_3)\\ &= 10\det(-v_2 \quad v_1 \quad -v_3) = -10\det(v_2 \quad v_1 \quad -v_3)\\ &= 10\det(v_2 \quad v_1 \quad v_3) = -10\det(v_1 \quad v_2 \quad v_3) = -10\cdot 5 = -50.\end{aligned}$$

f) Es gilt $\det(v_1-v_2 \quad v_1-v_2 \quad 7v_3) = \det(v_1-v_2 \quad 0 \quad 7v_3) = 0$. (Die Determinante einer Matrix mit Nullspalte ist Null.)

Aufgabe 54

Finden Sie ein Beispiel dafür, dass im Allgemeinen $\det(A+B) \neq \det(A)+\det(B)$ gilt.

Lösung:
Wähle

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Dann gilt $\det A = 0$ und $\det B = 0$, aber $\det(A+B) = 1$.

Aufgabe 55

Welche der Matrizen aus Aufgabe 44 sind invertierbar?

Lösung:
alle mit Ausnahme der Matrix aus Teil b), denn dies sind genau die Matrizen mit von 0 verschiedener Determinante

Aufgabe 56

Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme mit der Cramerschen Regel.

$$\text{a)}\quad \begin{aligned}2x+y+z&=0\\ x+y+2z&=-3\\ -x-2y+2z&=2\end{aligned} \qquad\qquad \text{b)}\quad \begin{aligned}3x+2y-z&=2\\ x+z&=2\\ x-y+2z&=3\end{aligned}$$

Lösung:
a) Man hat

$$\det\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ -1 & -2 & 2\end{pmatrix} = 7, \quad \det\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ -3 & 1 & 2\\ 2 & -2 & 2\end{pmatrix} = 14, \quad \det\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & -3 & 2\\ -1 & 2 & 2\end{pmatrix} = -21,$$

$$\det\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -3\\ -1 & -2 & 2\end{pmatrix} = -7, \qquad \text{also} \quad \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}14\\ -21\\ -7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\ -3\\ -1\end{pmatrix}$$

als eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystems.

b) Man hat

$$\det\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix} = 2, \quad \det\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\ 2 & 0 & 1\\ 3 & -1 & 2\end{pmatrix} = 2, \quad \det\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix} = 0,$$

$$\det\begin{pmatrix}3 & 2 & 2\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix} = 2, \qquad \text{also} \quad \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\ 0\\ 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

als eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystems.

Aufgabe 57

Bestimmen Sie die zu A beziehungsweise B inverse Matrix mit Hilfe der Cramerschen Regel

$$A = \begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ -1 & 4 & 5\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}.$$

Lösung:
Wir beginnen mit der Matrix A und berechnen - zum Beispiel mit der Regel von Sarrus - dass gilt

$$\det(A) = 12 - 1 - 2 + 3 = 12.$$

Nun lösen wir mit Hilfe der Cramerschen Regel die folgenden 3 Gleichungssysteme

$$Ax = \begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}, \quad Ay = \begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, \quad Az = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$$

Beachten wir, dass $\det(A) = 12$ gilt, so berechnen wir weiter

$$x_1 = \frac{\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\right)}{\det(A)} = \frac{5}{12}, \quad x_2 = \frac{\det\left(\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right)}{\det(A)} = \frac{-1}{12}, \quad x_3 = \frac{\det\left(\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right)}{\det(A)} = \frac{-3}{12},$$

$$y_1 = \frac{\det\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\right)}{\det(A)} = \frac{-1}{12}, \quad y_2 = \frac{\det\left(\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right)}{\det(A)} = \frac{5}{12}, \quad y_3 = \frac{\det\left(\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right)}{\det(A)} = \frac{3}{12},$$

$$z_1 = \frac{\det\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\right)}{\det(A)} = \frac{-2}{12}, \quad z_2 = \frac{\det\left(\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right)}{\det(A)} = \frac{-2}{12}, \quad z_3 = \frac{\det\left(\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\right)}{\det(A)} = \frac{6}{12},$$

Damit ist A^{-1} gegeben durch

$$A^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -3 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Wir machen noch einmal die Probe:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -3 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Betrachten wir nun die Matrix B. Wir berechnen

$$\det(B) = 12 + 5 - 4 - 8 + 3 - 10 = -2.$$

Nun lösen wir mit Hilfe der Cramerschen Regel die folgenden 3 Gleichungssysteme

$$Bx = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad By = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Bz = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Beachten wir, dass $\det(B) = -2$ gilt, so berechnen wir weiter

$$x_1 = \frac{\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}\right)}{\det(A)} = \frac{2}{-2}, \quad x_2 = \frac{\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\right)}{\det(A)} = \frac{8}{-2}, \quad x_3 = \frac{\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\right)}{\det(A)} = \frac{-6}{-2},$$

$$y_1 = \frac{\det\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}\right)}{\det(A)} = \frac{1}{-2}, \quad y_2 = \frac{\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\right)}{\det(A)} = \frac{1}{-2}, \quad y_3 = \frac{\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\right)}{\det(A)} = \frac{-1}{-2},$$

$$z_1 = \frac{\det\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\right)}{\det(A)} = \frac{-3}{-2}, \quad z_2 = \frac{\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\right)}{\det(A)} = \frac{-7}{-2}, \quad z_3 = \frac{\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right)}{\det(A)} = \frac{5}{-2},$$

Damit ist B^{-1} gegeben durch

$$B^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 8 & 1 & -7 \\ -6 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Wir machen noch einmal die Probe:

$$B \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -3 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 58

Beweisen Sie mit Hilfe von Zeilenumformungen, dass jede Matrix, in der zwei Zeilen übereinstimmen, die Determinante 0 hat.

Lösung:
Seien i und j mit $i \neq j$ die Nummern zweier Zeilen, die übereinstimmen. Addiert man das (-1)-fache der i-ten Zeile zur j-ten Zeile, so hat die Ergebnismatrix dieselbe Determinante wie die Ursprungsmatrix. Die Ergebnismatrix enthält aber nach Konstruktion eine Nullzeile (nämlich die j-te Zeile), hat also Determinante 0. Dies beweist die Behauptung.

Aufgabe 59

Untersuchen Sie die folgende Abbildung auf Wohldefiniertheit, Injektivität, Surjektivität und Bijektivität:

$$\varphi : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}, \; A \mapsto \det(A).$$

Lösung:
Da die Determinante einer Matrix eine reelle Zahl ist, ist die Abbildung wohldefiniert. Die Abbildung ist jedoch nicht injektiv, da zum Beispiel gilt

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0 = \det\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right),$$

aber $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Insbesondere ist φ damit auch nicht bijektiv. Aber φ ist surjektiv, denn sei $r \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann liegt $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und erfüllt

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}\right) = r.$$

Aufgabe 60

Berechnen Sie jeweils den Flächeninhalt des von den Vektoren v und w aufgespannten Parallelogramms.

a) $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \; w = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, b) $v = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \; w = \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \end{pmatrix}$, c) $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Lösung:
Da der Flächeninhalt mit dem Betrag der Determinante übereinstimmt, gilt

a) $\left|\det\left(\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}\right)\right| = |12 - 18| = 6,$

b) $\left|\det\left(\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}\right)\right| = |44 - 40| = 4,$

c) $\left|\det\left(\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\right)\right| = |2 - 10| = 8.$

— Aufgaben zum 5. Kapitel (Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit) —

Aufgabe 61

Untersuchen Sie jeweils durch Lösen eines linearen Gleichungssystems, ob die gegebenen Vektoren linear abhängig oder linear unabhängig sind.

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 43 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Lösung:
a) linear unabhängig, b) linear abhängig, c) linear abhängig.

Aufgabe 62

Untersuchen Sie durch Berechnen einer Determinante, ob die gegebenen Vektoren linear abhängig oder linear unabhängig sind.

a) $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Lösung:
a) linear abhängig (Determinante 0), b) linear unabhängig (Determinante 4),
c) linear abhängig (Determinante 0)

Aufgabe 63

Argumentieren Sie möglichst geschickt, ob die gegebenen Vektoren linear abhängig oder linear unabhängig sind.

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Lösung:
a) dritter Vektor ist das Negative des ersten Vektors $\Rightarrow$ linear abhängig

b) Das homogene lineare Gleichungssystem, dessen Lösungen die Koeffiziententupel sind, mit denen sich die drei gegebenen Vektoren zum Nullvektor linearkombinieren, hat zwei Gleichungen und drei Unbekannte. Da es sich um ein homogenes lineares Gleichungssystem handelt, ist es lösbar. Eine Zeilenstufenform der (erweiterten) Koeffizientenmatrix hat höchstens zwei Treppenstufen, so dass mindestens ein Parameter zur Beschreibung der Lösungsmenge notwendig ist. Also gibt es unendlich viele Lösungen dieses Gleichungssystems, und darunter ist sicherlich ein Koeffiziententupel, welches von Null verschiedene Einträge hat. Also sind die gegebenen Vektoren linear abhängig.

c) Wir nehmen an, dass die Linearkombination der gegebenen Vektoren mit Koeffizienten r, s, t der Nullvektor ist. Aufgrund der ersten Einträge der Vektoren ist dann $s = 0$. Es spielen also nur der erste und der dritte Vektor eine Rolle. Ihre dritten Einträge implizieren $t = 0$. Aus dem zweiten Eintrag des ersten Vektors folgt dann auch $r = 0$. Also sind die gegebenen Vektoren linear unabhängig.

— Aufgaben zum 6. Kapitel (Skalarprodukt, Orthogonalität, Vektorprodukt) —

Aufgabe 64

Berechnen Sie jeweils das Skalarprodukt der beiden Vektoren.

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Lösung:
a) 1, b) 0, c) 14.

Aufgabe 65

Seien $a,\ b \in \mathbb{R}^m$ mit $a \bullet a = 5$, $a \bullet b = 10$ und $b \bullet b = 21$. Berechnen Sie

a) $a \bullet (a + 3 \cdot b)$, b) $3 \cdot (a + b) \bullet (a - b)$, c) $(5 \cdot a + 2 \cdot b) \bullet (3 \cdot a - 4 \cdot b)$.

Lösung:
Aufgrund des Kommutativ- und Distributivgesetzes für das Skalarprodukt gilt
a) $a \bullet (a + 3 \cdot b) = a \bullet a + 3 \cdot a \bullet b = 5 + 3 \cdot 10 = 35$,
b) $3 \cdot (a + b) \bullet (a - b) = 3 \cdot (a \bullet a - a \bullet b + b \bullet a - b \bullet b) = 3 \cdot (a \bullet a - b \bullet b) = 3 \cdot (5 - 21) = -48$,
c) $(5 \cdot a + 2 \cdot b) \bullet (3 \cdot a - 4 \cdot b) = 15 \cdot a \bullet a - 20 \cdot a \bullet b + 6 \cdot b \bullet a - 8 \cdot b \bullet b = 15 \cdot a \bullet a - 14 \cdot a \bullet b - 8 \cdot b \bullet b = 15 \cdot 5 - 14 \cdot 10 - 8 \cdot 21 = 75 - 140 - 168 = -233$.

Aufgabe 66

Bestimmen Sie jeweils alle $s \in \mathbb{R}$, für die v und w senkrecht aufeinander stehen.

a) $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ s \end{pmatrix}$, b) $v = \begin{pmatrix} s \\ -1 \\ s+1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 2 \\ s-1 \\ 3 \end{pmatrix}$, c) $v = \begin{pmatrix} s \\ s+1 \\ -1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} -2 \\ s-1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Lösung:
a) $s=2$, b) $s=-1$, c) $s\in\{3,-1\}$.

Aufgabe 67

Bestimmen Sie jeweils alle $s\in\mathbb{R}$, für die u senkrecht auf v und w steht.

$$\text{a)}\quad u=\begin{pmatrix}1\\s\\-1\end{pmatrix},\ v=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\ w=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\qquad \text{b)}\quad u=\begin{pmatrix}0\\1\\s\end{pmatrix},\ v=\begin{pmatrix}s\\1\\2\end{pmatrix},\ w=\begin{pmatrix}s\\s\\-1\end{pmatrix},$$

$$\text{c)}\quad u=\begin{pmatrix}-1\\s\\0\end{pmatrix},\ v=\begin{pmatrix}1\\s\\1\end{pmatrix},\ w=\begin{pmatrix}2s-1\\s\\5\end{pmatrix},\qquad \text{d)}\quad u=\begin{pmatrix}1\\s\\1\end{pmatrix},\ v=\begin{pmatrix}1\\s^2\\0\end{pmatrix},\ w=\begin{pmatrix}1\\s\\-1\end{pmatrix}.$$

Lösung:
a) $u\bullet v=0$, $u\bullet w=-2+2s$, also $s=1$,
b) $u\bullet v=1+2s$, $u\bullet w=0$, also $s=\frac{-1}{2}$,
c) $u\bullet v=-1+s^2=(s-1)(s+1)$, $u\bullet w=1-2s+s^2=(s-1)^2$, also $s=1$,
d) $u\bullet v=1+s^3=(s+1)((s-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4})$, $u\bullet w=s^2$, also erfüllt kein $s\in\mathbb{R}$ gleichzeitig $u\bullet v=0$ und $u\bullet w=0$.

Aufgabe 68

Berechnen Sie das Kreuzprodukt der Vektoren v und w

$$\text{a)}\quad v=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix},\ w=\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix},\qquad \text{b)}\quad v=\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix},\ w=\begin{pmatrix}2\\4\\-1\end{pmatrix},$$

$$\text{c)}\quad v=\begin{pmatrix}3\\9\\1\end{pmatrix},\ w=\begin{pmatrix}15\\45\\5\end{pmatrix},\qquad \text{d)}\quad v=\begin{pmatrix}s-1\\s\\1\end{pmatrix},\ w=\begin{pmatrix}s\\s+1\\2\end{pmatrix}.$$

Lösung:
a) $v\times w=\begin{pmatrix}6\\5\\-4\end{pmatrix}$, b) $v\times w=\begin{pmatrix}-13\\4\\-10\end{pmatrix}$, c) $v\times w=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, d) $v\times w=\begin{pmatrix}s-1\\2-s\\-1\end{pmatrix}$.

Aufgabe 69

Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Wohldefiniertheit, Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

a) $\varphi:\ \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\ (v,w)\mapsto v\bullet w,$

b) $\varphi:\ \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\ (v,w)\mapsto v\times w,$

c) $\varphi:\ \{(v,w)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3;\ v,\ w \text{ linear unabhängig}\}\to\mathbb{R}^3,\ (v,w)\mapsto v\times w.$

Lösung:

a) Da das Skalarprodukt zweier reeller Vektoren nach $\mathbb{R}$ abbildet, ist φ wohldefiniert. Die Abbildung ist jedoch nicht injektiv, denn für $v\neq v'\in\mathbb{R}^n$ gilt $\varphi((v,0_n))=\varphi((v',0_n))=0$, aber $(v,0_n)\neq(v',0_n)$. Insbesondere ist φ damit nicht bijektiv. Die Abbildung ist aber surjektiv, denn sei $r\in\mathbb{R}$ beliebig. Wählen wir $v=(r\ 0\ 0\ \cdots\ 0)^T\in\mathbb{R}^n$ und $w=(1\ 0\ 0\ \cdots\ 0)^T\in\mathbb{R}^n$, so zeigt $v\bullet w=r$ die Behauptung.

b) Da das Kreuzprodukt zweier reeller Vektoren in den $\mathbb{R}^3$ abbildet, ist φ wohldefiniert. Die Abbildung ist jedoch nicht injektiv, denn für $v\neq v'\in\mathbb{R}^3$ gilt $\varphi((v,v))=\varphi((v',v'))=0_3$, aber $(v,v)\neq(v',v')$. Insbesondere ist φ damit nicht bijektiv. Die Abbildung ist aber surjektiv, denn sei $u\in\mathbb{R}^3$ beliebig. Sei zunächst $u_1\neq0$. Wählen wir $v=(u_2\ -u_1\ 0)^T\in\mathbb{R}^3$ und $w=(\frac{u_3}{u_1}\ 0\ -1)^T\in\mathbb{R}^3$, dann folgt $v\times w=(u_1\ u_2\ u_3)^T$. Sei nun $u_1=0$, dann wähle $v=(-1\ -u_3\ u_2)^T\in\mathbb{R}^3$ und $w=(0\ -u_3\ u_2)^T\in\mathbb{R}^3$. Damit berechnen wir $v\times w=(u_1\ u_2\ u_3)^T$. Dies zeigt die gewünschte Behauptung.

c) Da das Kreuzprodukt zweier reeller Vektoren in den $\mathbb{R}^3$ abbildet, ist φ wohldefiniert. Die Abbildung ist jedoch nicht injektiv, denn für $v=(1\ 0\ 0)^T\in\mathbb{R}^3$ und $w=(0\ 1\ 0)^T\in\mathbb{R}^3$ beziehungsweise $v'=(0\ 1\ 0)^T\in\mathbb{R}^3$ und $w'=(-1\ 0\ 0)^T\in\mathbb{R}^3$ gilt $\varphi((v,w))=\varphi((v',w'))=(0\ 0\ 1)^T$, aber $(v,w)\neq(v',w')$ und v und w beziehungsweise v' und w' sind linear unabhängig. Insbesondere ist φ damit nicht bijektiv. Die Abbildung ist auch nicht surjektiv, denn nach Vorlesung liefert das Kreuzprodukt für linear unabhängige Vektoren immer einen vom Nullvektor verschiedenen Vektor, also liegt $0_3\in\mathbb{R}^3$ nicht im Bild von φ.

— Aufgaben zum 7.Kapitel (Längen, Winkel und Abstände) —

Aufgabe 70

Berechnen Sie jeweils die Länge des Vektors.

$$\text{a)}\ \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix},\quad \text{b)}\ \begin{pmatrix}5\\0\\12\end{pmatrix},\quad \text{c)}\ \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\quad \text{d)}\ \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix},\quad \text{e)}\ \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix},\quad \text{f)}\ \begin{pmatrix}8\\11\\-16\end{pmatrix}.$$

Lösung:
a) 2, b) 13, c) 3, d) 3, e) $\sqrt{3}$, f) 21.

Aufgabe 71

Berechnen Sie jeweils den Winkel zwischen den beiden Vektoren.

$$\text{a)}\ \begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\5\\5\end{pmatrix},\qquad \text{b)}\ \begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix},\qquad \text{c)}\ \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}.$$

Lösung:
a) 30°, b) 90°, c) 60°.

Aufgabe 72

Bestimmen Sie jeweils die Projektion des Vektors v auf die Ursprungsgerade in $\mathbb{R}^2$ mit Richtungsvektor w.

a) $v = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$, b) $v = \begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$, c) $v = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$.

Lösung:
Wir normieren zuerst den Richtungsvektor der Ursprungsgeraden, um die Länge der Projektion als Skalarprodukt auszurechnen.

a) Länge der Projektion: $\binom{1}{4} \bullet (\frac{1}{3} \cdot \binom{3}{0}) = 1$, Projektion: $1 \cdot (\frac{1}{3} \cdot \binom{3}{0}) = \binom{1}{0}$,

b) Länge: $\binom{0}{5} \bullet (\frac{1}{\sqrt{20}} \cdot \binom{4}{2}) = \frac{10}{\sqrt{20}}$, Projektion: $\frac{10}{\sqrt{20}} \cdot (\frac{1}{\sqrt{20}} \cdot \binom{4}{2}) = \binom{2}{1}$,

c) v und w stehen senkrecht aufeinander, Projektion: $\binom{0}{0}$.

Aufgabe 73

Berechnen Sie jeweils den Flächeninhalt des von den Vektoren v und w aufgespannten Parallelogramms.

a) $v = \begin{pmatrix}3\\6\\2\end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}$, b) $v = \begin{pmatrix}4\\5\\-2\end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix}8\\11\\-3\end{pmatrix}$, c) $v = \begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$.

Lösung:
a) Norm von $v \times w = 7$, b) Norm von $v \times w = 9$, c) Norm von $v \times w = \sqrt{221}$.

— Aufgaben zum 8. Kapitel (Geraden und Ebenen) —

Aufgabe 74

Bestimmen Sie jeweils eine Parameterform der Geraden durch die gegebenen Punkte.

a) $(2 \;\; 2 \;\; -3)^{\mathrm{T}}$ und $(4 \;\; 0 \;\; 1)^{\mathrm{T}}$, b) $(7 \;\; 8 \;\; 3)^{\mathrm{T}}$ und $(5 \;\; 5 \;\; 2)^{\mathrm{T}}$.

Lösung:

a) $\left\{ \begin{pmatrix}2\\2\\-3\end{pmatrix} + p \begin{pmatrix}2\\-2\\4\end{pmatrix} \,\middle|\, p \in \mathbb{R} \right\}$ oder auch $\left\{ \begin{pmatrix}2\\2\\-3\end{pmatrix} + p \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} \,\middle|\, p \in \mathbb{R} \right\}$,

b) $\left\{ \begin{pmatrix}7\\8\\3\end{pmatrix} + p \begin{pmatrix}-2\\-3\\-1\end{pmatrix} \,\middle|\, p \in \mathbb{R} \right\}$ oder auch $\left\{ \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + p \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} \,\middle|\, p \in \mathbb{R} \right\}$.

Aufgabe 75

Untersuchen Sie jeweils, ob die drei Punkte auf einer Geraden liegen.

a) $(3 \;\; 2 \;\; -4)^{\mathrm{T}}$ und $(1 \;\; 1 \;\; 0)^{\mathrm{T}}$ sowie $(7 \;\; 4 \;\; 8)^{\mathrm{T}}$,

b) $(1 \;\; 1 \;\; 0)^{\mathrm{T}}$ und $(3 \;\; -3 \;\; 2)^{\mathrm{T}}$ sowie $(4 \;\; -5 \;\; 3)^{\mathrm{T}}$,

c) $(2 \;\; -5 \;\; 2)^{\mathrm{T}}$ und $(1 \;\; -2 \;\; 4)^{\mathrm{T}}$ sowie $(3 \;\; -7 \;\; 6)^{\mathrm{T}}$.

Lösung:
a) nein, b) ja, c) nein.

Aufgabe 76

Untersuchen Sie jeweils die gegenseitige Lage der gegebenen Geraden (sind gleich; sind nicht gleich, aber parallel; haben genau einen Schnittpunkt; sind windschief) und bestimmen Sie gegebenenfalls den Schnittpunkt.

a) $\{(3 \;\; 1 \;\; 1)^{\mathrm{T}} + p(2 \;\; 2 \;\; 1)^{\mathrm{T}} \mid p \in \mathbb{R}\}$ und $\{(4 \;\; -1 \;\; -9)^{\mathrm{T}} + q(-1 \;\; 0 \;\; 3)^{\mathrm{T}} \mid q \in \mathbb{R}\}$,

b) $\{(4 \;\; 0 \;\; 5)^{\mathrm{T}} + p(2 \;\; -3 \;\; 1)^{\mathrm{T}} \mid p \in \mathbb{R}\}$ und $\{(2 \;\; -3 \;\; 4)^{\mathrm{T}} + q(-4 \;\; 6 \;\; -2)^{\mathrm{T}} \mid q \in \mathbb{R}\}$,

c) $\{(4 \;\; 6 \;\; 1)^{\mathrm{T}} + p(1 \;\; 2 \;\; 1)^{\mathrm{T}} \mid p \in \mathbb{R}\}$ und $\{(7 \;\; -2 \;\; 2)^{\mathrm{T}} + q(3 \;\; -1 \;\; 2)^{\mathrm{T}} \mid q \in \mathbb{R}\}$,

d) $\{(1 \;\; 6 \;\; -2)^{\mathrm{T}} + p(3 \;\; -3 \;\; 6)^{\mathrm{T}} \mid p \in \mathbb{R}\}$ und $\{(6 \;\; 1 \;\; 8)^{\mathrm{T}} + q(4 \;\; -4 \;\; 8)^{\mathrm{T}} \mid q \in \mathbb{R}\}$,

e) $\{(-2 \;\; 2 \;\; 3)^{\mathrm{T}} + p(2 \;\; 3 \;\; 1)^{\mathrm{T}} \mid p \in \mathbb{R}\}$ und $\{(1 \;\; 2 \;\; -5)^{\mathrm{T}} + q(4 \;\; 5 \;\; 1)^{\mathrm{T}} \mid q \in \mathbb{R}\}$,

f) $\{(3 \;\; 6 \;\; 1)^{\mathrm{T}} + p(2 \;\; 4 \;\; 5)^{\mathrm{T}} \mid p \in \mathbb{R}\}$ und $\{(-1 \;\; 8 \;\; 0)^{\mathrm{T}} + q(-1 \;\; 3 \;\; 2)^{\mathrm{T}} \mid q \in \mathbb{R}\}$.

Lösung:

a) schneiden sich in genau einem Punkt, nämlich in $(1 \;\; -1 \;\; 0)^{\mathrm{T}}$

b) parallel, aber nicht gleich

c) schneiden sich in genau einem Punkt, nämlich in $(1 \;\; 0 \;\; -2)^{\mathrm{T}}$

d) gleich

e) windschief

f) schneiden sich in genau einem Punkt, nämlich in $(1 \;\; 2 \;\; -4)^{\mathrm{T}}$

Aufgabe 77

Bestimmen Sie eine Parameterform der Ebene, welche die angegebenen Punkte bzw. Geraden enthält.

a) $(1 \;\; 0 \;\; 1)^{\mathrm{T}}$ und $(5 \;\; 2 \;\; -1)^{\mathrm{T}}$ sowie $(1 \;\; -3 \;\; 0)^{\mathrm{T}}$,

b) $(3 \;\; 2 \;\; 2)^{\mathrm{T}}$ und $(4 \;\; 3 \;\; 3)^{\mathrm{T}}$ sowie $(4 \;\; 3 \;\; 4)^{\mathrm{T}}$,

c) $(0 \;\; 1 \;\; 0)^{\mathrm{T}}$ und $\{(1 \;\; 0 \;\; 1)^{\mathrm{T}} + p(2 \;\; 1 \;\; -2)^{\mathrm{T}} \mid p \in \mathbb{R}\}$,

d) $\{(3 \;\; 0 \;\; 2)^{\mathrm{T}} + p(1 \;\; 1 \;\; -2)^{\mathrm{T}} \mid p \in \mathbb{R}\}$ und $\{(3 \;\; 0 \;\; 2)^{\mathrm{T}} + q(-2 \;\; 1 \;\; 4)^{\mathrm{T}} \mid q \in \mathbb{R}\}$.

Lösung:

a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \,\middle|\, p,q \in \mathbb{R} \right\}$ oder auch $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, p,q \in \mathbb{R} \right\}$,

b) $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \,\middle|\, p,q \in \mathbb{R} \right\}$ oder auch $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, p,q \in \mathbb{R} \right\}$,

c) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \,\middle|\, p,q \in \mathbb{R} \right\}$,

d) $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \,\middle|\, p,q \in \mathbb{R} \right\}$ oder auch $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, p,q \in \mathbb{R} \right\}$.

Aufgabe 78

Untersuchen Sie jeweils, ob die vier Punkte in einer Ebene liegen.

a) $(0 \quad 0 \quad 1)^{\mathrm{T}}$ und $(1 \quad -1 \quad -3)^{\mathrm{T}}$ sowie $(4 \quad 2 \quad 0)^{\mathrm{T}}$ und $(-3 \quad 1 \quad 8)^{\mathrm{T}}$,

b) $(1 \quad 3 \quad -2)^{\mathrm{T}}$ und $(3 \quad 1 \quad -1)^{\mathrm{T}}$ sowie $(4 \quad 5 \quad 2)^{\mathrm{T}}$ und $(2 \quad -2 \quad -2)^{\mathrm{T}}$,

c) $(2 \quad 1 \quad 3)^{\mathrm{T}}$ und $(1 \quad -1 \quad 0)^{\mathrm{T}}$ sowie $(3 \quad -5 \quad 2)^{\mathrm{T}}$ und $(-1 \quad 9 \quad 1)^{\mathrm{T}}$.

Lösung:

a) ja, b) nein, c) ja.

Aufgabe 79

Untersuchen Sie jeweils, ob der Punkt $(1 \quad -1 \quad 2)^{\mathrm{T}}$ auf der Geraden bzw. Ebene liegt.

a) $\{(5 \quad -1 \quad -4)^{\mathrm{T}} + p(2 \quad 0 \quad -3)^{\mathrm{T}} \mid p \in \mathbb{R}\}$,

b) $\{(-1 \quad -4 \quad -4)^{\mathrm{T}} + p(1 \quad 2 \quad 3)^{\mathrm{T}} \mid p \in \mathbb{R}\}$,

c) $\{(-3 \quad 1 \quad 9)^{\mathrm{T}} + p(2 \quad -1 \quad -1)^{\mathrm{T}} + q(1 \quad -1 \quad 2)^{\mathrm{T}} \mid p,q \in \mathbb{R}\}$,

d) $\{(9 \quad 2 \quad 4)^{\mathrm{T}} + p(1 \quad 3 \quad 1)^{\mathrm{T}} + q(2 \quad -1 \quad 0)^{\mathrm{T}} \mid p,q \in \mathbb{R}\}$.

Lösung:

a) ja (für $p = -2$), b) nein, c) nein, d) ja (für $p = -2$ und $q = -3$).

Aufgabe 80

Berechnen Sie jeweils das Vektorprodukt $v \times w$ und geben Sie eine Normalenform der Ebene $E = \{ u + p \cdot v + q \cdot w \mid p,q \in \mathbb{R} \}$ an.

a) $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$,

b) $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$,

c) $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Lösung:

a) $v \times w = (-1 \quad 4 \quad -5)^{\mathrm{T}}$ und $E = \left\{(x \quad y \quad z)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{3\times1} \mid -x + 4y - 5z = -1\right\}$

b) $v \times w = (8 \quad -10 \quad -11)^{\mathrm{T}}$ und $E = \left\{(x \quad y \quad z)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{3\times1} \mid 8x - 10y - 11z = 7\right\}$

c) $v \times w = (-28 \quad 9 \quad 7)^{\mathrm{T}}$ und $E = \left\{(x \quad y \quad z)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{3\times1} \mid -28x + 9y + 7z = 2\right\}$

Aufgabe 81

Berechnen Sie jeweils eine Normalenform der in Parameterform gegebenen Ebene.

a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, p,q \in \mathbb{R} \right\}$, b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, p,q \in \mathbb{R} \right\}$.

Lösung:

a) Eine Normalenform ist gegeben durch

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times1} \,\middle|\, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times1} \,\middle|\, 2x + y = 2 \right\}.$$

b) Eine Normalenform ist gegeben durch

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times1} \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \bullet \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times1} \,\middle|\, x + y + 6z = 5 \right\}.$$

Aufgabe 82

Berechnen Sie jeweils eine Parameterform der in Normalenform gegebenen Ebene.

a) $\left\{(x \quad y \quad z)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{3\times1} \,\middle|\, x + 2y + 3z = 1\right\}$, b) $\left\{(x \quad y \quad z)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{3\times1} \,\middle|\, 2x - y - z = 4\right\}$.

Lösung:

a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \,\middle|\, p,q \in \mathbb{R} \right\}$, b) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \,\middle|\, p,q \in \mathbb{R} \right\}$.

Aufgabe 83

Berechnen Sie jeweils eine Normalenform der gesuchten Ebene.

a) Ebene senkrecht zu $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \,\middle|\, p \in \mathbb{R} \right\}$ durch $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$,

b) Ebene, die den Punkt $(1 \quad 2 \quad -1)^{\mathrm{T}}$ enthält und senkrecht auf E_1 und E_2 steht, wobei

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \,\middle|\, p,q \in \mathbb{R} \right\} \text{ und } E_2 = \left\{ r \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, r,s \in \mathbb{R} \right\},$$

c) Ebene, die die Gerade g enthält und senkrecht auf die Ebene E steht, wobei

$$g = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \,\middle|\, p \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{und} \quad E = \left\{ \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, q,r \in \mathbb{R} \right\}.$$

Lösung:

a) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1} \,\middle|\, x - 2y + 2z = -4 \right\}$, b) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1} \,\middle|\, -13x + 5y + 4z = -7 \right\}$,

c) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1} \,\middle|\, 8x - 2y + 3z = 3 \right\}$

Aufgabe 84

Untersuchen Sie jeweils, ob der Punkt $(1 \quad -1 \quad 2)^{\mathrm{T}}$ auf der gegebenen Ebene liegt.

a) $\left\{ (x \quad y \quad z)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{3\times 1} \,\middle|\, 3x + 2y - z = 2 \right\}$, b) $\left\{ (x \quad y \quad z)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{3\times 1} \,\middle|\, 4x + 2y - z = 0 \right\}$.

Lösung:

a) nein, b) ja.

Aufgabe 85

Untersuchen Sie jeweils die gegenseitige Lage der gegebenen Ebenen (sind gleich; sind nicht gleich, aber parallel; haben eine Gerade als Schnittmenge) und bestimmen Sie gegebenenfalls die Schnittgerade.

a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \,\middle|\, p, q \in \mathbb{R} \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \,\middle|\, r, s \in \mathbb{R} \right\}$,

b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \,\middle|\, p, q \in \mathbb{R} \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \,\middle|\, r, s \in \mathbb{R} \right\}$,

c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \,\middle|\, p, q \in \mathbb{R} \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \,\middle|\, r, s \in \mathbb{R} \right\}$,

d) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \,\middle|\, p, q \in \mathbb{R} \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \,\middle|\, r, s \in \mathbb{R} \right\}$.

Lösung:

a) haben eine Gerade als Schnittmenge: $\left\{ (2 \quad 0 \quad 2)^{\mathrm{T}} + r(1 \quad 2 \quad 7)^{\mathrm{T}} \,\middle|\, r \in \mathbb{R} \right\}$,

b) haben eine Gerade als Schnittmenge: $\left\{ (1 \quad 0 \quad 5)^{\mathrm{T}} + r(5 \quad 3 \quad 0)^{\mathrm{T}} \,\middle|\, r \in \mathbb{R} \right\}$,

c) sind gleich, d) sind nicht gleich, aber parallel.

Aufgabe 86

Untersuchen Sie jeweils die gegenseitige Lage von Gerade und Ebene (Gerade liegt in der Ebene; Gerade liegt nicht in der Ebene, ist aber parallel zu ihr; Gerade und Ebene haben genau einen Schnittpunkt) und bestimmen Sie gegebenenfalls den Schnittpunkt.

a) $\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \,\middle|\, p \in \mathbb{R} \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \,\middle|\, q, r \in \mathbb{R} \right\}$,

b) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 16 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \,\middle|\, p \in \mathbb{R} \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \,\middle|\, q, r \in \mathbb{R} \right\}$,

c) $\left\{ \begin{pmatrix} 14 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix} \,\middle|\, p \in \mathbb{R} \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \,\middle|\, q, r \in \mathbb{R} \right\}$.

Lösung:

a) schneiden sich in genau einem Punkt, nämlich in $(2 \quad -1 \quad -3)^{\mathrm{T}}$,

b) schneiden sich in genau einem Punkt, nämlich in $(2 \quad 2 \quad 12)^{\mathrm{T}}$,

c) die Gerade liegt in der Ebene.

Aufgabe 87

Untersuchen Sie jeweils die gegenseitige Lage von Gerade und Ebene (Gerade liegt in der Ebene; Gerade liegt nicht in der Ebene, ist aber parallel zu ihr; Gerade und Ebene haben genau einen Schnittpunkt) und bestimmen Sie gegebenenfalls den Schnittpunkt.

a) $\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \,\middle|\, p \in \mathbb{R} \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1} \,\middle|\, x - 2y + 3z = 2 \right\}$,

b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \,\middle|\, p \in \mathbb{R} \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1} \,\middle|\, x + 4y - z = -1 \right\}$,

c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} \,\middle|\, p \in \mathbb{R} \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1} \,\middle|\, 2x - 3y + z = 5 \right\}$.

Lösung:

a) schneiden sich in genau einem Punkt, nämlich in $(9 \quad 5 \quad 1)^{\mathrm{T}}$

b) die Gerade liegt nicht in der Ebene, ist aber parallel zu ihr

c) schneiden sich in genau einem Punkt, nämlich in $(1 \quad -1 \quad 0)^{\mathrm{T}}$

Aufgabe 88

Untersuchen Sie jeweils die gegenseitige Lage der Ebenen (sind gleich; sind nicht gleich, aber parallel; haben eine Gerade als Schnittmenge) und bestimmen Sie ggf. die Schnittgerade.

a) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1} \,\middle|\, x - 2y + 3z = 2 \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \,\middle|\, p, q \in \mathbb{R} \right\}$,

b) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1} \,\middle|\, x - 2y + 3z = 2 \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix} \,\middle|\, p, q \in \mathbb{R} \right\}$,

c) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1} \,\middle|\, 3x - 5y + z = 3 \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \,\middle|\, p, q \in \mathbb{R} \right\}$,

d) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1} \,\middle|\, x + 2y + 8z = 1 \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1} \,\middle|\, x + y + 5z = 1 \right\}$,

e) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1} \,\middle|\, x + 7y + 3z = 2 \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1} \,\middle|\, 2x + 9y + z = -1 \right\}$,

f) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1} \,\middle|\, 2x + y + 8z = 3 \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1} \,\middle|\, x + y + 6z = 2 \right\}$,

g) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1} \,\middle|\, x + 2y + 8z = 1 \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1} \,\middle|\, -x - 2y - 8z = 1 \right\}$,

h) $\left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1} \;\middle|\; x-3y+z=2\right\}$ und $\left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1} \;\middle|\; x-5y+3z=-2\right\}$.

Lösung:

a) haben eine Gerade als Schnittmenge: $\{(0 \quad -1 \quad 0)^T + r(5 \quad 1 \quad -1)^T \mid r \in \mathbb{R}\}$,

b) haben eine Gerade als Schnittmenge: $\{(0 \quad -1 \quad 0)^T + r(-1 \quad 4 \quad 3)^T \mid r \in \mathbb{R}\}$,

c) sind nicht gleich, aber parallel,

d) haben eine Gerade als Schnittmenge: $\{(1 \quad 0 \quad 0)^T + r(2 \quad 3 \quad -1)^T \mid r \in \mathbb{R}\}$,

e) haben eine Gerade als Schnittmenge: $\{(-5 \quad 1 \quad 0)^T + r(-4 \quad 1 \quad -1)^T \mid r \in \mathbb{R}\}$,

f) haben eine Gerade als Schnittmenge: $\{(1 \quad 1 \quad 0)^T + r(2 \quad 4 \quad -1)^T \mid r \in \mathbb{R}\}$,

g) sind nicht gleich, aber parallel,

h) haben eine Gerade als Schnittmenge: $\{(8 \quad 2 \quad 0)^T + r(2 \quad 1 \quad 1)^T \mid r \in \mathbb{R}\}$.

Aufgabe 89

Berechnen Sie jeweils den Schnittwinkel der geometrischen Objekte in $\mathbb{R}^3$.

a) $\left\{\begin{pmatrix} 6\\ 3\\ 1\end{pmatrix} + p\begin{pmatrix} 1\\ 2\\ 5\end{pmatrix} \;\middle|\; p \in \mathbb{R}\right\}$ und $\left\{\begin{pmatrix} 6\\ 3\\ 1\end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 1\\ 2\\ -1\end{pmatrix} \;\middle|\; q \in \mathbb{R}\right\}$,

b) $\left\{\begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 1\end{pmatrix} + p\begin{pmatrix} 3\\ 1\\ 10\end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 5\end{pmatrix} \;\middle|\; p,q \in \mathbb{R}\right\}$ und $\left\{\begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1\\ 4\\ -1\end{pmatrix} \;\middle|\; r \in \mathbb{R}\right\}$,

c) $\left\{\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix} + p\begin{pmatrix} -5\\ 3\\ 1\end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} -4\\ 2\\ 1\end{pmatrix} \;\middle|\; p,q \in \mathbb{R}\right\}$ und $\left\{\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3\\ 1\\ 1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 5\\ 2\\ 1\end{pmatrix} \;\middle|\; r,s \in \mathbb{R}\right\}$.

Lösung:
a) 90°, b) 60°, c) 60°.

Aufgabe 90

Berechnen Sie jeweils eine Parameterform der gesuchten Geraden.

a) Gerade senkrecht zu $\left\{\begin{pmatrix} 2\\ 3\\ -1\end{pmatrix} + p\begin{pmatrix} 2\\ 4\\ 1\end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ -1\end{pmatrix} \;\middle|\; p,q \in \mathbb{R}\right\}$ durch $\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 3\end{pmatrix}$,

b) Gerade senkrecht zu $\left\{\begin{pmatrix} 2\\ 8\\ 5\end{pmatrix} + p\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix} \;\middle|\; p \in \mathbb{R}\right\}$ und $\left\{\begin{pmatrix} 2\\ 8\\ 5\end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 2\\ -1\\ 3\end{pmatrix} \;\middle|\; q \in \mathbb{R}\right\}$ durch $\begin{pmatrix} 2\\ 8\\ 5\end{pmatrix}$,

c) Gerade, die senkrecht auf g steht und in E enthalten ist, wobei

$$g = \left\{\begin{pmatrix} 1\\ -1\\ -1\end{pmatrix} + p\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 2\end{pmatrix} \;\middle|\; p \in \mathbb{R}\right\} \qquad \text{und} \qquad E = \left\{\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} -2\\ 2\\ 3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1\\ 2\\ 4\end{pmatrix} \;\middle|\; q,r \in \mathbb{R}\right\}.$$

Lösung:

a) $\left\{\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 4\\ -3\\ 4\end{pmatrix} \;\middle|\; r \in \mathbb{R}\right\}$, b) $\left\{\begin{pmatrix} 2\\ 8\\ 5\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 4\\ -1\\ -3\end{pmatrix} \;\middle|\; r \in \mathbb{R}\right\}$, c) $\left\{\begin{pmatrix} 3\\ 1\\ 3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -4\\ 2\\ 1\end{pmatrix} \;\middle|\; r \in \mathbb{R}\right\}$

Aufgabe 91

Bestimmen Sie jeweils den Lotfußpunkt von P auf der Geraden g bzw. der Ebene E.

a) $P = (0 \quad 0 \quad 2)^T$ und $g = \{(1 \quad 7 \quad -1)^T + p(2 \quad 1 \quad -1)^T \mid p \in \mathbb{R}\}$,

b) $P = (9 \quad 3 \quad -1)^T$ und $g = \{(-1 \quad 5 \quad 0)^T + p(1 \quad -3 \quad -3)^T \mid p \in \mathbb{R}\}$,

c) $P = (7 \quad 4 \quad -7)^T$ und $E = \{(5 \quad 4 \quad 4)^T + p(1 \quad -1 \quad 1)^T + q(2 \quad 4 \quad 5)^T \mid p,q \in \mathbb{R}\}$,

d) $P = (5 \quad 1 \quad 2)^T$ und $E = \{(1 \quad 0 \quad 7)^T + p(1 \quad 3 \quad -1)^T + q(1 \quad 0 \quad 2)^T \mid p,q \in \mathbb{R}\}$.

Lösung:
a) $(-3 \quad 5 \quad 1)^T$, b) $(0 \quad 2 \quad -3)^T$, c) $(1 \quad 2 \quad -3)^T$, d) $(1 \quad 3 \quad 4)^T$.

Aufgabe 92

Bestimmen Sie zu den Daten aus Aufgabe 91 jeweils den Abstand von P und g bzw. E.

Lösung:
a) $\sqrt{35}$, b) $\sqrt{86}$, c) $2\sqrt{14}$, d) $2\sqrt{6}$

Aufgabe 93

Bestimmen Sie jeweils den Abstand des Punktes P von der Geraden g bzw. der Ebene E.

a) $P = (-3 \quad 3 \quad 1)^T$ und $g = \{(8 \quad 8 \quad -1)^T + p(3 \quad 1 \quad -2)^T \mid p \in \mathbb{R}\}$,

b) $P = (1 \quad 8 \quad 4)^T$ und $g = \{(-6 \quad 2 \quad 7)^T + p(0 \quad 2 \quad -1)^T \mid p \in \mathbb{R}\}$,

c) $P = (1 \quad -4 \quad 7)^T$ und $E = \{(8 \quad 4 \quad 1)^T + p(1 \quad 4 \quad -2)^T + q(1 \quad -3 \quad 5)^T \mid p,q \in \mathbb{R}\}$,

d) $P = (-3 \quad -8 \quad 4)^T$ und $E = \{(6 \quad 2 \quad 9)^T + p(2 \quad 7 \quad -6)^T + q(5 \quad 4 \quad 3)^T \mid p,q \in \mathbb{R}\}$.

Lösung:
a) $2\sqrt{6}$, b) 7, c) $2\sqrt{6}$, d) $\sqrt{2}$.

Aufgabe 94

Bestimmen Sie jeweils den Abstand der Gerade g von der Geraden h beziehungsweise der Ebene E.

a) $g = \left\{\begin{pmatrix} 2\\ 3\\ -2\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 2\\ 0\\ 1\end{pmatrix} \middle| s \in \mathbb{R}\right\}$ und $h = \left\{\begin{pmatrix} -2\\ 1\\ 1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 4\\ 5\\ -3\end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R}\right\}$

b) $g = \left\{\begin{pmatrix} 2\\ -3\\ 8\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 1\end{pmatrix} \middle| s \in \mathbb{R}\right\}$ und $h = \left\{\begin{pmatrix} 3\\ 1\\ 7\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} -4\\ 4\\ 3\end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R}\right\}$

c) $g = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \middle| s \in \mathbb{R} \right\}$ und $E = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| s, t \in \mathbb{R} \right\}$

d) $g = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| s \in \mathbb{R} \right\}$ und $E = \left\{ \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| s, t \in \mathbb{R} \right\}$

Lösung:
a) 2,

b) 4,

c) 0 (Gerade und Ebene schneiden sich),

d) $\frac{15}{7}$.

Aufgabe 95

Berechnen Sie den Abstand von

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

und

$$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \middle| s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Lösung:
Der Abstand ist 1.

Aufgabe 96

Bestimmen Sie jeweils den Abstand des Punktes P von der Ebene E.

a) $P = (-2 \quad 9 \quad 3)^{\mathrm{T}}$ und $E = \{(x \quad y \quad z)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{3\times 1} \mid x + y - 4z = 13\}$,

b) $P = (2 \quad 1 \quad -1)^{\mathrm{T}}$ und $E = \{(x \quad y \quad z)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{3\times 1} \mid 6x + 2y + 3z = -17\}$.

Lösung:
a) $3\sqrt{2}$, b) 4.

Aufgabe 97

Berechnen Sie jeweils eine Hesse-Normalenform von E und bestimmen Sie dann den Abstand von P zu E.

a) $E = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} \middle| p, q \in \mathbb{R} \right\}$ und $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$,

b) $E = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| p, q \in \mathbb{R} \right\}$ und $P = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$,

c) $E = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \middle| p, q \in \mathbb{R} \right\}$ und $P = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -9 \end{pmatrix}$.

Lösung:
a) $\{(x \quad y \quad z)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{3\times 1} \mid \frac{2}{7}x + \frac{3}{7}y + \frac{6}{7}z = 1\}$ und $d(P, E) = 2$

b) $\left\{(x \quad y \quad z)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{3\times 1} \middle| \frac{1}{9}x + \frac{4}{9}y - \frac{8}{9}z = -2\right\}$ und $d(P, E) = 3$

c) $\left\{(x \quad y \quad z)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{3\times 1} \middle| \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z = 5\right\}$ und $d(P, E) = 0$ (der Punkt P liegt auf E)

Aufgabe 98

Berechnen Sie jeweils den Abstand von E_1 und E_2.

a) $E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| p, q \in \mathbb{R} \right\}$ und $E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1} \middle| x + 3y - 2z = 5 \right\}$,

b) $E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| p, q \in \mathbb{R} \right\}$ und $E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1} \middle| 3x + y + 2z = 23 \right\}$,

c) $E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1} \middle| -x + 2y + 2z = 9 \right\}$ und $E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1} \middle| x - 2y - 2z = -3 \right\}$.

Lösung:
a) 0 (Ebenen schneiden sich), b) $\sqrt{14}$, c) 2.

Aufgabe 99

Bestimmen Sie jeweils den Abstand der Geraden g von der Geraden h bzw. der Ebene E.

a) $g = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| p \in \mathbb{R} \right\}$ und $h = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \middle| q \in \mathbb{R} \right\}$,

b) $g = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| p \in \mathbb{R} \right\}$ und $h = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \middle| q \in \mathbb{R} \right\}$,

c) $g = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \middle| p \in \mathbb{R} \right\}$ und $E = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| q, r \in \mathbb{R} \right\}$,

d) $g = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| p \in \mathbb{R} \right\}$ und $E = \left\{ \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| q, r \in \mathbb{R} \right\}$,

e) $g = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \middle| p \in \mathbb{R} \right\}$ und $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1} \middle| 3x + y + 2z = 23 \right\}$.

Lösung:
a) 2, b) 4, c) 0 (Gerade und Ebene schneiden sich), d) $\frac{15}{7}$, e) $\sqrt{14}$.

Aufgabe 100

Zwei Geraden g und h in $\mathbb{R}^2$ seien in Normalenform gegeben durch $a_1 \cdot x + b_1 \cdot y + c_1 = 0$ bzw. $a_2 \cdot x + b_2 \cdot y + c_2 = 0$. Wir nehmen an, dass g und h weder gleich noch parallel sind.

a) Folgern Sie aus der linearen Unabhängigkeit der Richtungsvektoren von g und h, dass g und h genau einen Schnittpunkt haben. (Von welcher Gestalt ist eine Treppenstufenform der zugehörigen erweiterten Koeffizientenmatrix?)

b) Stellen Sie mit Hilfe der Cramerschen Regel eine Formel für die Koordinaten des Schnittpunkts von g und h auf.

Lösung:
Die gemeinsamen Punkte von g und h sind die Lösungen des linearen Gleichungssystems, das sich als Kombination der gegebenen Normalenformen ergibt. Die Zeilen der zugehörigen Koeffizientenmatrix sind die Normalenvektoren $(a_1, b_1)^{\mathrm{T}}$ und $(a_2, b_2)^{\mathrm{T}}$. Nach Voraussetzung sind die Richtungsvektoren von g und h linear unabhängig. Also sind auch die Normalenvektoren linear unabhängig und somit nicht skalare Vielfache voneinander. Die Treppen einer Treppenstufenform der erweiterten Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems entsprechen also den Unbekannten x und y. Also ist das lineare Gleichungssystem eindeutig lösbar, und es gibt genau einen Schnittpunkt von g und h. Die rechte Seite ist $(-c_1, -c_2)^{\mathrm{T}}$. Nach der Cramerschen Regel sind die Koordinaten des Schnittpunkts also

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -c_1 & b_1 \\ -c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & -c_1 \\ a_2 & -c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

— *Aufgaben zum 10. Kapitel (Kreise und Kugeln)* —

Aufgabe 101
Welche geometrischen Figuren beschreiben die folgenden Mengen?

a) $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, (x_1^2 - 1) + (x_2 + 1)^2 = 8 \right\}$

b) $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, (x_1 - 1)^2 - 5 \leqslant -(x_2 + 2)^2 \right\}$

c) $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 3x_1^2 + 12x_1 + 3x_2^2 + 6x_2 = 0 \right\}$

d) $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, (x_1 + x_2)^2 - x_1(x_2 + 3) + x_2(4 - x_1) = 10 \right\}$

e) $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + 2x_2(-1 + x_1 + x_3) \leqslant 7 + x_2^2 \right\}$

f) $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 4(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 8(x_1 + 2x_2)^2 + 12x_3 = 71 \right\}$

Lösung:
a) Kreis(rand) mit Radius 3 um $M = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1^2 + (x_2 + 1)^2 = 9 \right\}.$$

b) Kreis(fläche) mit Radius $\sqrt{5}$ um $M = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, (x_1 - 1)^2 + (x_2 + 2)^2 \leqslant 5 \right\}.$$

c) Kreis(rand) mit Radius $\sqrt{5}$ um $M = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, (x_1 + 2)^2 + (x_2 + 1)^2 = 5 \right\}.$$

d) Kreis(rand) mit Radius 2 um $M = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, (x_1 - \tfrac{3}{2})^2 + (x_2 + 2)^2 = 4 \right\}.$$

e) Vollkugel mit Radius $\sqrt{8}$ um $M = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1^2 + (x_2 - 1)^2 + x_3^2 \leqslant 8 \right\}.$$

f) Kugelfläche mit Radius 5 um $M = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 + (x_3 + \tfrac{3}{2})^2 = 25 \right\}$$

Aufgabe 102
Berechnen Sie zu denen in Aufgabe 101 angegebenen geometrischen Objekten den Umfang, den Flächeninhalt oder das Volumen.

Lösung:
a) Der Umfang beträgt $2\pi r = 2\pi \cdot 3 = 6\pi$.

b) Der Flächeninhalt beträgt $\pi r^2 = \pi \cdot \sqrt{5}^2 = 5\pi$.