Übung 10 - Lösung
(Eigenwerte und Eigenvektoren / Diagonalisierung / Nullstellen)

S1) Zeigen Sie an der Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ die Gültigkeit der Aussagen:

a) Die Spur einer Matrix entspricht der Summe der Eigenwerte.

b) Die Determinante einer Matrix entspricht dem Produkt der Eigenwerte.

(*Lösung: Eigenwerte allgemein berechnen und Summe sowie Produkt bilden.*)

S2) Bestimmen Sie die Diagonalisierung der Matrix $M = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -7 \\ 3 & 7 & -3 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Geben Sie ohne zusätzliche Rechnung das *Bild* und den *Kern* der Matrix M an.

(*Lösung:* $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$; $ker(M) = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $img(M) = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$)

S3) Führen Sie eine *Hauptachsentransformation*[1] für die Kurve $x^2 + 4xy + y^2 = 1$ durch.
(*Lösung:* $3x'^2 - y'^2 = 1$)

S4) An einem Fluss werden Boote verliehen. Dazu wurden zwei Anlegestellen A_1, A_2 an verschiedenen Orten am Fluss gebaut, bei denen Boote ausgeborgt und zurückgegeben werden können. Die Erfahrung hat gezeigt, dass 60% der Boote, die bei A_1 gemietet werden, auch dort zurückgegeben werden. Der Rest kommt zu A_2. 70% der Boote, die bei A_2 gemietet werden, werden auch dort zurückgegeben, der Rest bei A_1.

a) Ist es möglich die Boote so auf beide Anlegestellen zu verteilen, dass die Anzahl der Boote an einer Anlegestelle von Tag zu Tag unverändert bleibt? Wie sieht diese Verteilung aus?

b) Wenn man die Boote irgendwie verteilt, was passiert im Laufe der Zeit?
(Hinweis: Betrachten Sie die Gleichung $\vec{x}(n) = M^n \vec{x}(0)$ und stellen Sie $\vec{x}(0)$ als Linearkombination der Eigenvektoren dar.)

(*Lösung: a)* $A_1\colon \approx 43\%$, $A_2\colon \approx 57\%$; *b) Es stellt sich ein Gleichgewichtszustand ein.*)

R1) Wir betrachten den Vektorraum V reeller Zahlenfolgen

$$V = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}_{>0}} \colon a_n \in \mathbb{R};\}$$

mit den Operatoren

$$\begin{aligned} L &\colon (a_1; a_2; a_3; \ldots) \mapsto (a_2; a_3; a_4; \ldots) \\ R &\colon (a_1; a_2; a_3; \ldots) \mapsto (0; a_1; a_2; \ldots) \\ P &\colon (a_1; a_2; a_3; \ldots) \mapsto (a_1^2; a_2^2; a_3^2; \ldots) \end{aligned}$$

[1] Siehe *Musteraufgaben* 10.2.

Bestimmen Sie zu diesen Operatoren die Menge der Eigenwerte. Geben Sie jeweils einen Eigenwert mit zugehörigem Eigenvektor an.
(*Lösung:* $L\colon \mathbb{R}$; $R\colon \emptyset$; $P\colon \mathbb{R}\setminus\{0\}$)