

Übung 4 - Lösung

(Skalarprodukt / Metrik)

S1) Berechnen Sie die Terme mit dem Standardskalarprodukt.

$$a) 5 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} \right) \right) \quad b) \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle$$

(Lösung: a) 17; b) 22)

S2) Lösen Sie die Gleichungen mit dem Standardskalarprodukt.

$$a) \left\langle \begin{pmatrix} x \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2x \\ -x \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -x \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \quad b) 3 \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ x-2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2x \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^2 \\ x+4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

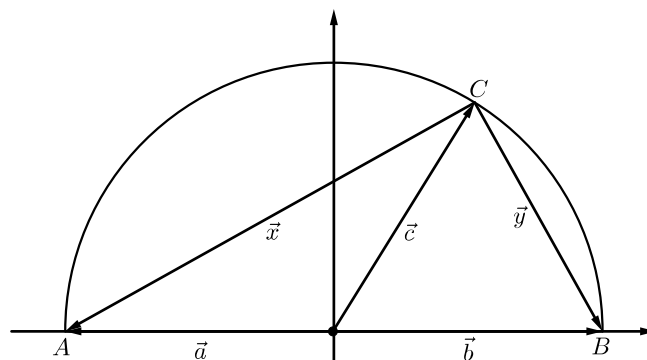
(Lösung: a) $x_1 = 4; x_2 = -1$; b) $x_1 = -2; x_2 = \frac{1}{7}$)

S3) Im Raum \mathbb{R}^3 sei ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ so gegeben, dass $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ eine Orthonormalbasis¹ bilden. Berechnen Sie den Wert von $\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Hinweis: Stellen Sie die Vektoren in der gegebenen Basis dar und verwenden Sie die Rechenregeln für Skalarprodukte.

(Lösung: 4)

S4) Beweisen Sie den Satz von Thales² mit Hilfe des Skalarprodukts.



¹Die Vektoren sind paarweise orthogonal und haben Länge 1.

²Liegt der Punkt C eines Dreiecks ABC auf einem Halbkreis über der Strecke \overline{AB} , dann hat das Dreieck bei C immer einen rechten Winkel.

S5) Für welche Werte $x, y \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 4+x \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -3 \\ 5x \\ -1+y \end{pmatrix}$$

bzgl. des Standardskalarprodukts im \mathbb{R}^3 orthogonal? Skizzieren Sie die Lösungsmenge!
(Lösung: $y = 4 - 3x$)

S6) Im Raum $\mathcal{P}_2([0; 1])$ definieren wir das Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f \cdot g \, dx$$

- a) Berechnen Sie den Abstand und den Winkel zwischen $f(x) = 2x^2$ und $g(x) = x - 1$.
b) Geben Sie jenes Polynom $p(x) = ax^2 + 2, a \in \mathbb{R}$ an, das zu $h(x) = 2x^2 - 1$ orthogonal ist.
(Lösung: a) $d(f, g) = \sqrt{\frac{22}{15}}; \alpha \approx 108,8^\circ$; b) $p(x) = 10x^2 + 2$)

R1) Sei $\mathcal{RI}([0; 1])$ der Raum der (Riemann-)integrierbaren Funktionen im Intervall $[0; 1]$. Zeigen Sie, dass durch $\int_0^1 f \cdot g \, dx$ kein Skalarprodukt gegeben ist.
(Lösung: Positive Definitheit ist verletzt.)

R2) (*Wurmloch im Weltall*) Gegeben seien zwei feste Punkte $\vec{W}_1, \vec{W}_2 \in \mathbb{R}^3$. Wir definieren den Abstand von zwei Punkten im Raum $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}$ durch die Metrik

$$d(\vec{x}, \vec{y}) := \min \left\{ \|\vec{x} - \vec{y}\|_2; \|\vec{x} - \vec{W}_1\|_2 + \|\vec{y} - \vec{W}_2\|_2; \|\vec{x} - \vec{W}_2\|_2 + \|\vec{y} - \vec{W}_1\|_2 \right\}$$

- a) Erläutern Sie, wie der Begriff *Wurmloch* für die Strecke $\overline{W_1 W_2}$ hier zu verstehen ist.
b) Berechnen Sie den Abstand $d(\vec{x}, \vec{y})$ für

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \vec{W}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{W}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

- c) Argumentieren Sie, warum durch $d(\vec{x}, \vec{y})$ keine Metrik im mathematisch strengen Sinn definiert wird (vgl. *Musterbeispiele 4.1/2 b*).
(Lösung: $d(\vec{x}, \vec{y}) \approx 7,984$: c) Positivität verletzt.)