Übung 8 - Lösung
(Lineare Abbildungen)

S1) Zeigen Sie, dass $spur(A)\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung ist.

S2) Sei V der Vektorraum der reellen 2×2 Matrizen und $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ festgehalten. Wir definieren eine lineare Abbildung $f\colon V \to V$ durch

$$f(A) = A \cdot B$$

a) Geben Sie die zu f gehörende Abbildungsmatrix bezüglich der kanonischen Basis

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

an.

b) Berechnen Sie die Koordinaten von $f(B)$ bzgl. der kanonischen Basis.

c) Prüfen sie f auf Injektivität und Surjektivität. Begründung!

(*Lösung: a)* $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$*; b)* $\begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ 21 \\ 42 \end{pmatrix}$*; c) Weder injektiv noch surjektiv.*)

S3) Im Vektorraum $\mathbb{R}^2$ seien zwei Basen festgelegt:

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \qquad B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

a) Bestimmen Sie die Transformationsmatrix ${}_{B_2}T_{B_1}$, die einen Vektor von B_1 in die Basis B_2 transformiert.

b) Stellen Sie den Vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}_{B_2}$ in der kanonischen und der Basis B_1 dar.

(*Lösung: a)* ${}_{B_2}T_{B_1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$*; b)* $\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}_K$ *und* $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}_{B_1}$)

S4) Die Abbildungsmatrix einer linearen Funktion bzgl. den Standardbasen sei $M_f = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Geben Sie die Darstellungsmatrix A_f in den Basen

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

an.

(*Lösung:* $A_f = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 6 & -43 \\ -2 & 29 \end{pmatrix}$)

R1) Geben Sie in $\mathcal{P}_2$ die Transformationsmatrix ${}_{B_2}T_{B_1}$ bezüglich der Basen

$$B_1 = \left\{x^2; x^2 + x; x - 1\right\} \qquad\qquad B_2 = \left\{2x^2 - 1; x^2 - x; x + 1\right\}$$

an.

(*Lösung:* ${}_{B_2}T_{B_1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$)