

Übung 14 - Lösung

(Integralrechnung)

S1) Berechnen Sie die Integrale $\int f_n(x) dx$ für die Funktionen

$$f_1(x) = 2x e^{-x}$$

$$f_2(x) = x e^{x^2+1}$$

$$f_3(x) = \sin(\sqrt{x})$$

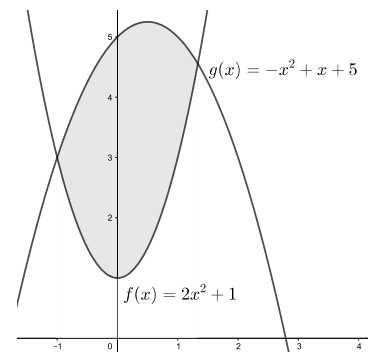
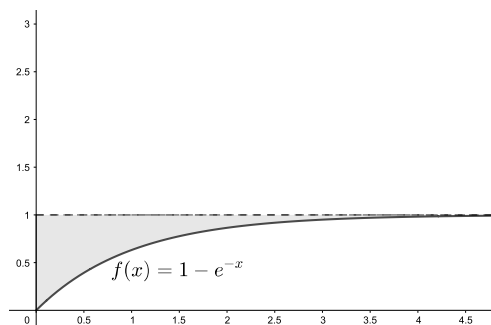
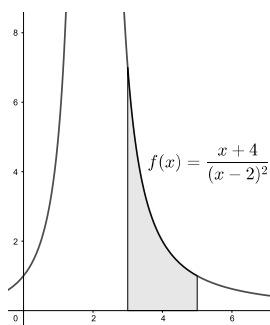
$$f_4(x) = \frac{4}{3x \ln(x)}$$

$$f_5(x) = \frac{3x^2 - 2x + 1}{x + 1}$$

$$f_6(x) = \frac{x + 1}{x^2 - 4}$$

(Lösung: $f_1: -2e^{-x}(x+1) + c$; $f_2: \frac{e^{x^2+1}}{2} + c$; $f_3: 2\sin(\sqrt{x}) - 2\sqrt{x}\cos(\sqrt{x}) + c$; $f_4: \frac{4}{3}\ln|\ln|x|| + c$;
 $f_5: \frac{3x^2}{2} - 5x + 6\ln|x+1| + c$; $f_6: \frac{1}{4}(\ln|x+2| + 3\ln|x-2|) + c$)

S2) Berechnen Sie die Flächeninhalte.



(Lösung: $\ln(3) + 4 \approx 5,1$; $1; \approx 6,35$)

S3) Die Lebensdauer von elektronischen Bauteilen kann durch eine *Exponentialverteilung* beschrieben werden. Die entsprechende Dichtefunktion hat die Gestalt $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$.

a) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion $F(t) = \int_0^t f(x) dx$.

b) Berechnen Sie den Erwartungswert $E = \int_0^{\infty} t \cdot f(t) dt$.

c) Von einem bestimmten Bauteil ist bekannt, dass es nach durchschnittlich 1000 Tagen ausfällt. Bestimmen Sie die zugehörige Dichtefunktion $f(t)$.

i. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein solches Bauteil höchstens (noch) 200 Tage hält.

ii. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hält ein Bauteil mindestens noch 50 Tage?

d) Wir wissen, die Wahrscheinlichkeit, dass ein Bauteil mindestens s Tage hält, ist mit $1 - F(s)$ und dass es mindestens $s + t$ Tage hält, entsprechend mit $1 - F(s + t)$ zu berechnen. Setzen wir diese beiden Wahrscheinlichkeiten ins Verhältnis, so erhalten wir

$$\frac{1 - F(s + t)}{1 - F(s)} = \dots = 1 - F(t)$$

Vervollständigen Sie die Rechnung und interpretieren Sie das Ergebnis!

(Lösung: a) $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$; b) $\frac{1}{\lambda}$; ci) 18, 13% cii) 95, 12%)

S4) Zeigen Sie, dass die Menge

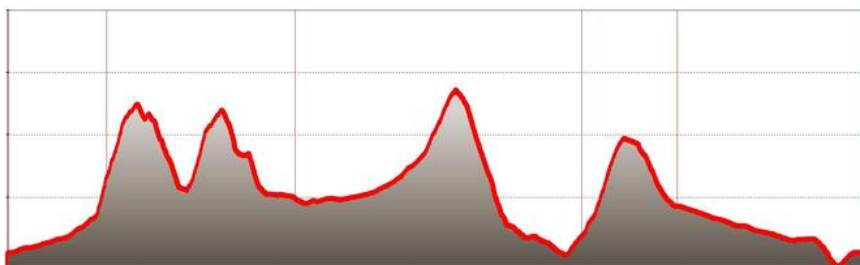
$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}; \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx); \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(mx) \right\}$$

mit dem Skalarprodukt $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f g dx$ für alle $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$ ein *Orthonormalsystem* bildet.

Hinweis: Verwenden Sie die Identitäten

$$\sin(x) \cos(y) = \frac{1}{2} (\sin(x - y) + \sin(x + y)) \quad \sin^2(x) = \frac{1}{2} (1 - \cos(2x)) \quad \cos^2(x) = \frac{1}{2} (1 + \cos(2x))$$

R1) (*Ausblick zum „Stieltjes-Integral“*) Wir fahren mit dem Auto eine längere Strecke durch hügeliges Gelände. Unser GPS-Gerät protokolliert dabei die aktuelle Seehöhe pro gefahrenem Kilometer.



Wir möchten jetzt gerne wissen, auf welcher Seehöhe wir uns *durchschnittlich* aufgehalten haben. Dazu nehmen wir die gespeicherten Höhenangaben und dividieren sie durch die Anzahl der Messpunkte (gefahrte Kilometer).

a) Ein befreundeter Mathematiker macht uns darauf aufmerksam, dass diese Vorgangsweise falsch ist. Begründen Sie warum er recht hat!

Um das Problem lösen zu können brauchen wir weitere Informationen, die unser Auto zum Glück ebenfalls abgespeichert hat. Im Bordcomputer wird die verstrichene Zeit pro Kilometer protokolliert. Wir stellen alle Daten zu einer Tabelle zusammen.

Distanz x [km]	Höhe h [m]	Zeit $t = \varphi$ [s]	Zeitdifferenz $\Delta t = \Delta \varphi$ [s]
0	500	0	–
1	550	30	30
2	600	70	40
3	620	130	60
4	600	150	20
5	630	200	50
...

b) Berechnen Sie aus den Tabellendaten die ungefähre Durchschnittshöhe \bar{h} auf den ersten fünf Kilometern.

Durch die diskreten Datenwerte kann nur eine näherungsweise Berechnung erfolgen. Hätten unsere Geräte *kontinuierlich* aufgezeichnet, so wäre auch die Ermittlung des exakten Werts kein Problem gewesen. Wir müssen eine Summation über alle Höhenangaben gewichtet mit den Zeitspannen durchführen. Diese Summation erfolgt theoretisch über unendlich kleine Zeitspannen

und geht damit in ein Integral über. Stellen wir die falsche Methode aus Punkt a) mit der korrekten Methode aus Punkt b) gegenüber:

$$\text{falsch: } \bar{h} = \frac{1}{b-a} \int_a^b h(x) dx \qquad \text{richtig: } \bar{h} = \frac{1}{\varphi(b) - \varphi(a)} \int_a^b h(x) d\varphi(x)$$

Der neue Integralbegriff wird *Riemann-Stieltjes Integral* genannt und kann natürlich formal exakt definiert werden. Eine einfache Formel zur Berechnung existiert, falls $\varphi(x)$ stetig differenzierbar ist:

$$\int_a^b h(x) d\varphi(x) = \int_a^b h(x) \varphi'(x) dx$$

Damit haben wir das übliche Riemann-Integral erhalten und können wie gewohnt rechnen.

- c) Berechnen Sie die Durchschnittshöhe für $h(x) = -0,04x^4 + 0,6x^3 - 2,83x^2 + 4,05x + 450$ und $\varphi(x) = 0,1x^2 + x$ für $x \in [0; 6]$.

(Lösung: b) $\bar{h} = 606 \text{ m}$; c) $\bar{h} \approx 450 \text{ m}$)