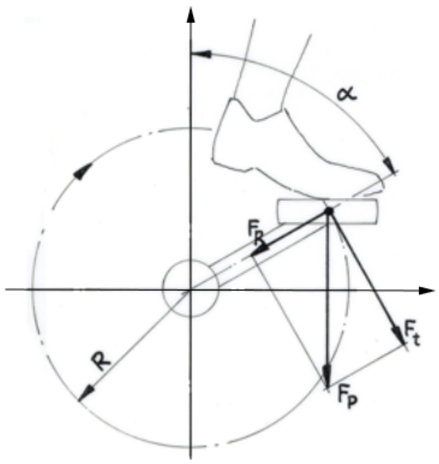
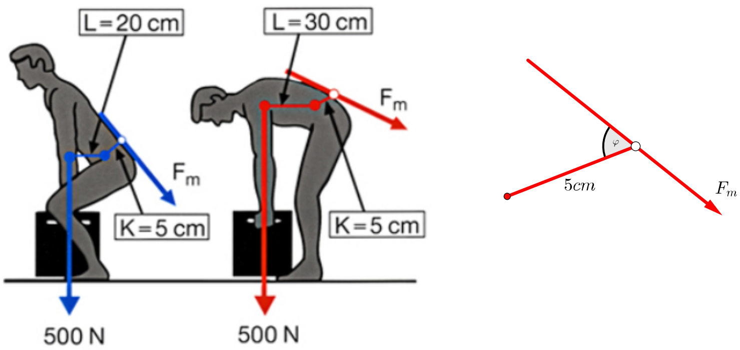
Übung 6 - Lösung
(Kreuzprodukt)

S1) Für die folgende Abbildung gelte $R = 0,15m$, $\alpha = 60°$ und $\vec{F_p} = \begin{pmatrix} 0 \\ -800 \end{pmatrix} N$.
Der Koordinatenursprung liegt im Mittelpunkt des Kreises.



Berechnen Sie die Teilkräfte $\vec{F_R}$, $\vec{F_t}$ sowie das Drehmoment $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F_p}$.
(*Lösung:* $\vec{F_R} = -200 \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{F_t} = 200 \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -3 \end{pmatrix}$; $\vec{M} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -104 \end{pmatrix}$)

S2) Die Abbildung zeigt zwei Varianten einen Gegenstand (Last) zu heben.



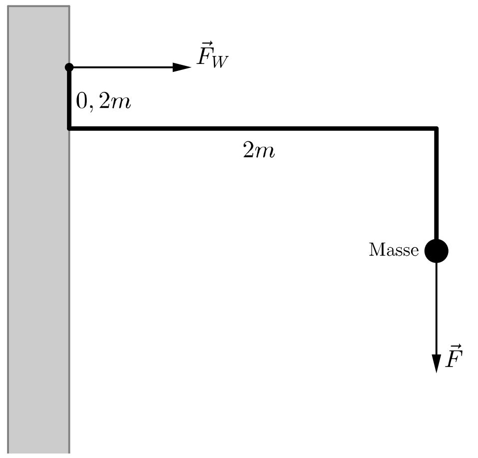
a) Verwenden Sie die Regel „Kraft mal Kraftarm ist gleich Last mal Lastarm“ um die jeweiligen Kräfte F_m zu bestimmen ($\varphi = 60°$ für Variante zwei).

b) Für die Belastung F_B auf die Bandscheiben gilt $F_B = F_m + \text{Last}$. Berechnen Sie die jeweilige Belastung F_B für beide Varianten.

c) Wie viel Prozent Mehrbelastung tritt bei der *schlechten* Variante auf?

(*Lösung: a)* $F_m = 2000$ *bzw.* $F_m \approx 3464$*; b)* $F_B = 2500$ *bzw.* $F_B \approx 3964$; c) $58,6\%$)

S3) Gegeben sei eine Wandhalterung die an einer einzigen Stelle mit der Wand verbunden ist.

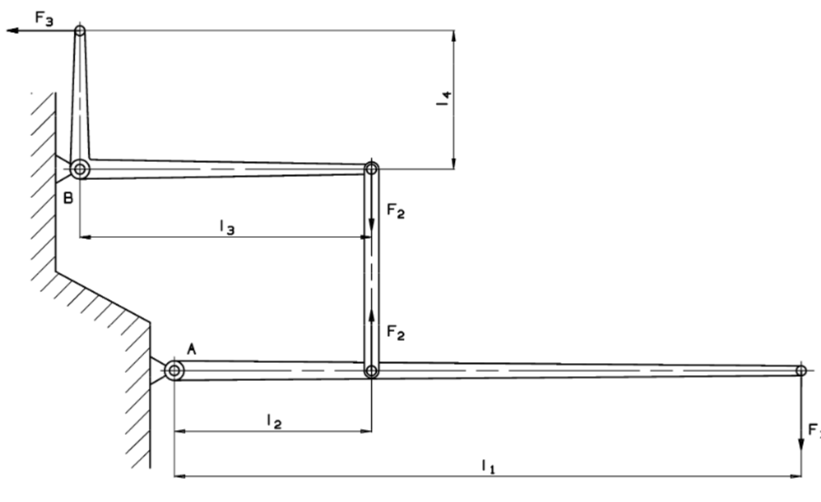


a) Wählen Sie ein geeignetes Koordinatensystem. Bestimmen Sie das von $\vec{F}$ erzeugte Drehmoment $\vec{M}$ mit der Masse $2t$.

b) Welche Kraft muss die Halterung im Befestigungspunkt mindestens aufnehmen können, damit die $2t$ Masse getragen werden kann?

(*Lösung: a)* $\vec{M} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4000g \end{pmatrix}$*; b)* $\vec{F}_W = \begin{pmatrix} 20.000g \\ 0 \end{pmatrix}$)

S4) Die folgende Abbildung zeigt ein *Hebelgestänge*.



a) Welche Kraft F_3 kompensiert eine einwirkende Kraft $F_1 = 180N$, falls $l_1 = 530mm$, $l_2 = 120mm$, $l_3 = 180mm$ und $l_4 = 90mm$ gilt?

b) Wie lange muss der Hebel l_1 gewählt werden, wenn das Hebelgestänge bei $F_1 = 200N$ die Kraft $2000N$ liefern soll?

(*Lösung: a)* $F_3 = 1590N$*; b)* $l_1 = 600mm$)

S5) Berechnen Sie die Normalform der Ebene ε auf zwei Arten.

$$\varepsilon\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} \qquad s,t\in\mathbb{R}$$

(*Lösung:* $\varepsilon\colon 3x - 2z + 5y = 1$)

S6) Berechnen Sie $\varepsilon\cap\eta$, $\varepsilon\cap\tau$ und $\tau\cap\pi$:

$$\varepsilon\colon 3x-4y+z=1 \qquad \eta\colon x+2y-4z=0 \qquad \tau\colon 2x+z=1 \qquad \pi\colon\ -x+4z+6=0$$

(*Lösung:* $\varepsilon\cap\eta\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}0,2\\-0,1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}14\\13\\10\end{pmatrix}$; $\varepsilon\cap\tau\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}4\\1\\-8\end{pmatrix}$; $\tau\cap\pi\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}\frac{10}{9}\\0\\-\frac{11}{9}\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$)

R1) Der (vorzeichenbehaftete) Abstand eines Punktes im Raum zu einer Ebene kann durch das *Spatprodukt*

$$(\vec{x},\vec{y},\vec{z}) := (\vec{x}\times\vec{y})\cdot\vec{z}$$

berechnet werden[1]. Für den Abstand des Punktes $\vec{p}\in\mathbb{R}^3$ zur Ebene $\varepsilon\colon \vec{x} = \vec{p}_0 + s\vec{a} + t\vec{b}$ gilt

$$d(\vec{p},\varepsilon) = \frac{(\vec{a},\vec{b},\overrightarrow{p_0p})}{|\vec{a}\times\vec{b}|}$$

Geben Sie eine geometrische Begründung (Beweis) für die Richtigkeit dieser Formel an. Skizze! Berechnen Sie den Abstand von

$$\vec{p} = \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} \qquad\qquad \varepsilon\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$$

(*Lösung:* $|d(\vec{p},\varepsilon)| = \frac{5}{\sqrt{2}} \approx 3,54$)

R2) Leiten Sie geometrisch eine Abstandsformel der beiden windschiefen Geraden $g_1\colon \vec{x} = \vec{p}_1 + s\vec{a}$ und $g_2\colon \vec{x} = \vec{p}_2 + s\vec{b}$ her.

[1] Vergleiche Musterbeispiel 6.1/3.