Übung 11 - Lösung
(Funktionen / Stetigkeit)

S1) Bestimmen Sie die reellen Lösungen der Gleichungen.

$$a)\ x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x = 0 \qquad\qquad b)\ x^4 - 29x^2 + 100 = 0$$

(*Lösung: a)* $x_1 = 0; x_2 = 1; x_3 = -1; x_4 = -2$; *b)* $x_{1,2} = \pm 2; x_{3,4} = \pm 5$)

S2) Untersuchen Sie die gegebenen Funktionen $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf *Symmetrie (gerade/ungerade)*, *Periodizität* und *Stetigkeit*. Fertigen Sie für jede Funktion eine Skizze an.

$$a)\ f_1(x) = |x| := \begin{cases} x & ,x \geq 0 \\ -x & ,x < 0 \end{cases} \qquad b)\ f_2(x) = \cos(2x) \qquad c)\ f_3(x) = 2\sin(x + \pi)$$

$$d)\ f_4(x) = \begin{cases} +1 & ,x \geq 0 \\ -1 & ,x < 0 \end{cases} \qquad e)\ f_5(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x^2} \qquad f)\ f_6(x) = \begin{cases} +1 & ,x \leq -1 \\ -x & ,-1 < x \leq 1 \\ -1 & ,x > 1 \end{cases}$$

S3) Die Funktion $f : (-\infty; 1] \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = \frac{\sqrt{1-x} - 1}{x}$$

Setzen Sie $f(x)$ an der Stelle $x = 0$ stetig fort.
(*Lösung:* $f(x = 0) = -\frac{1}{2}$)

S4) Geben Sie jene Polynomfunktion $g(x)$ an, die die Funktion

$$f(x) = \frac{3x^4 + 2x^2 - x + 5}{x^2 + x}$$

für sehr große $x-$Werte asymptotisch beschreibt.
(*Lösung:* $g(x) = 3x^2 - 3x + 5$)

S5) Gegeben seien die zwei Funktionen

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ,x < -5 \\ 2 & ,-5 \leq x < -1 \\ x & ,-1 \leq x < 3 \\ 1 & ,3 \leq x \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 1 & ,x < -1 \\ x^2 & ,-1 \leq x < 5 \\ 3 & ,5 \leq x \end{cases} \qquad h(x) = f(x) \cdot g(x)$$

Berechnen Sie die Werte $h(x)$ für $x \in \{-7; -3; 0; 2; 4; 6\}$.
(*Lösung:* $h(-7) = 0$; $h(-3) = 2$; $h(0) = 0$; $h(2) = 8$; $h(4) = 16$; $h(6) = 3$)

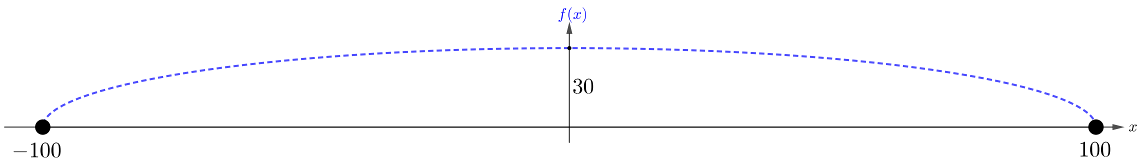
S6) Lösen Sie die Gleichungen in $\mathbb{R}$.

a) $6\ln^2(x)+2=\ln(x^7)$ *b)* $\ln(x+1)+\ln(x-1)=3$ *c)* $x^{\ln(x)}=x^4$

d) $\ln(\ln(x))=1$ *e)* $(1-\ln(x))^2=\ln\left(\frac{x}{\mathrm{e}}\right)$ *f)* $3^{x+2}+4^x=4^{x+1}-3^{x+1}$

(Lösung: a) $x_1=\mathrm{e}^{\frac{2}{3}}; x_2=\sqrt{\mathrm{e}}$*; b)* $x=\sqrt{\mathrm{e}^3+1}$*; c)* $x_1=1; x_2=\mathrm{e}^4$*; d)* $x=\mathrm{e}^e$*; e)* $x_1=\mathrm{e}; x_2=\mathrm{e}^2$*; f)* $x=\frac{\ln(4)}{\ln(4)-\ln(3)}\approx 4,8188$)

R1) Betrachten Sie den abgebildeten gebogenen Brückenträger. Geben Sie für jeden Funktionstyp f_n jene Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ an, sodass alle geometrischen Bedingungen erfüllt sind.



$$f_1(x)=ax^2+b \qquad f_2(x)=-\left(\mathrm{e}^{ax}+\mathrm{e}^{-ax}\right)+b \qquad f_3(x)=a\cdot\cos(bx) \qquad f_4(x)=a\sqrt{1-bx^2}$$

(Lösung: $f_1(x)=0,003x^2+30$*;* $f_2(x)=-\left(\mathrm{e}^{-0,0346x}+\mathrm{e}^{0,0346x}\right)+32$*;* $f_3(x)=30\cos(\frac{\pi}{200}x)$*;* $f_4(x)=30\sqrt{1-100^{-2}x^2}$)