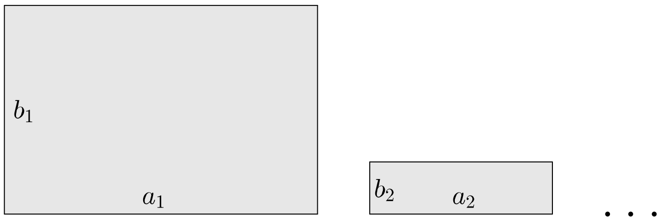
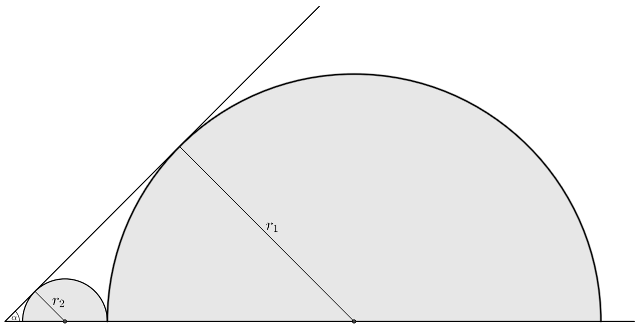
Übung 1 - Lösung
(Geometrische Reihe / Vektorrechnung)

S1) Gegeben sei eine Folge von Rechtecken, deren Seitenlängen a_n, b_n im Verhältnis $2:1$ stehen, d.h. $\frac{a_n}{b_n} = \frac{2}{1}$. Das Bildungsgesetz für die Folge der Seitenlängen lautet $a_{n+1} = \frac{a_n}{4}$ mit $a_1 = 3$.



Bestimmen Sie die Gesamtfläche und den Gesamtumfang aller ($n \to \infty$) Rechtecke.
(*Lösung:* $A = 4,8$*;* $U = 12$)

S2) In einen Winkel der Größe $\alpha = 45°$ werden unendlich viele Halbkreise eingeschrieben.



a) Berechnen Sie den Faktor q, für den $r_{n+1} = q \cdot r_n$ gilt. (Hinweis: Pythagoras und Strahlensatz)
b) Bestimmen Sie die Gesamtfläche aller Halbkreise mit $r_1 = 2$.

(*Lösung: a)* $q = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \approx 0,17$*; b)* $A \approx 6,47$)

S3) Skizzieren Sie die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ in einem kartesischen Koordinatensystem.
Ermitteln Sie grafisch die Vektoren

$$\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c} \qquad \vec{y} = 2 \cdot \left(\vec{a} - \vec{b}\right) + \vec{c} \qquad \vec{z} = 2\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} \qquad \vec{u} = 3\vec{b} - (\vec{a} + \vec{c})$$

Berechnen Sie ebenfalls die Längen von $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$.
(*Lösung:* $|\vec{a}| = \sqrt{5}; |\vec{b}| = \sqrt{5}; |\vec{c}| = 2$)

S4) Auf ein punktförmiges Objekt im Ursprung wirken die Kräfte

$$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{F}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

a) Skizzieren Sie alle Kraftvektoren.

b) Geben Sie den resultierenden Kraftvektor an und berechnen Sie seinen Betrag.

(*Lösung: b)* $|\vec{F}| = \left|\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right| = \sqrt{2}$)

S5) Prüfen Sie nach, ob die gegebenen Mengen aus linear unabhängigen Vektoren bestehen.

$$a)\ A = \left\{\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}\right\} \qquad b)\ B = \left\{\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\7\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

(*Lösung: A ist linear unabhängig, B ist linear abhängig.*)

S6) Für welchen Wert $x \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix}2\\1\\x\end{pmatrix}$$

linear abhängig? Geben Sie die erhaltene Linearkombination $\vec{v}_3 = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2$ an.
(*Lösung:* $x = 1; \vec{v}_3 = -1\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$)

S7) Formen Sie die Geradengleichungen auf die Normalform $y = kx + d$ um ($t \in \mathbb{R}$):

$$a)\ g\colon \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \qquad b)\ h\colon \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$$

(*Lösung: a)* $y = 3 - x$; *b)* $y = \frac{3}{2} - \frac{x}{2}$)

R1) Gegeben sei das Dreieck $[A(-1,5;\,-1), B(-0,5;\,2), C(2,5;\,-1)]$.

a) Geben Sie eine Parametrisierung der Dreiecksseiten a, b, und c an.

b) Geben Sie eine Parametrisierung der Trägergeraden der Dreiecksseiten an.

c) Geben Sie eine Parametrisierung der Winkelsymmetralen im Punkt A an.

d) Geben Sie zwei(!) Parametrisierungen der Schwerlinie (Strecke) $\overline{AM_a}$ an.

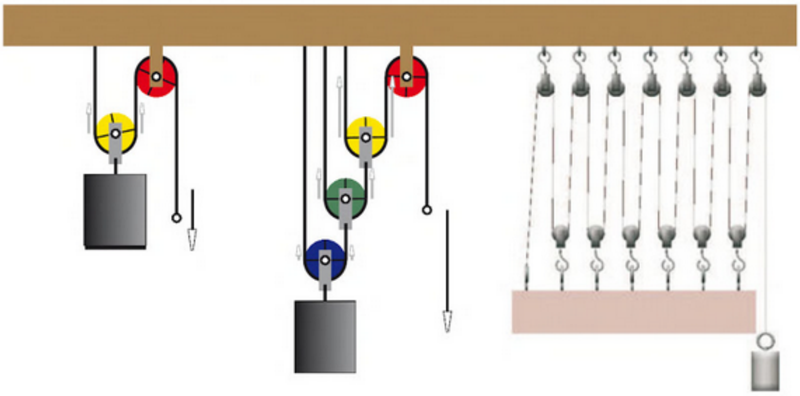
(*Lösung: a)* $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$; $c\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}-1,5\\-1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ *für* $t \in [0;1]$*; Die anderen Strecken analog.*

b) $t_c\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}-1,5\\-1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ *für* $t \in \mathbb{R}$; Die anderen Geraden analog.

c) $\omega_A\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}-1,5\\-1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}\sqrt{10}+1\\3\end{pmatrix}$

d) z.B: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-1,5\\-1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2,5\\1,5\end{pmatrix}$ für $t \in [0;1]$ und $\vec{x} = \begin{pmatrix}-1,5\\-1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ für $t \in [0;\frac{1}{2}]$)

R2) Die folgende Abbildung[1] zeigt drei Varianten von Flaschenzügen.



Beim einfachen Flaschenzug (erstes Bild) kann eine Masse m, auf die die Kraft $|\vec{G}| = m \cdot g$ wirkt (g ist die Fallbeschleunigung), mit der Kraft $|\vec{F}| > \frac{1}{2}mg$ angehoben werden. Dies liegt daran, dass die Masse nur den halben Weg nach oben zurücklegt, wenn am Seil nach unten gezogen wird.[2]
Im zweiten Bild wird das Prinzip kombiniert und die notwendige Kraft muss nur noch $|\vec{F}| > \frac{1}{8}mg$ erfüllen.

a) Geben Sie eine allgemeine Formel für die benötigte Kraft $|\vec{F}|$ für n kombinierte Flaschenzüge an.

   i. Was passiert für $n \to \infty$?

   ii. Angenommen Sie können eine Kraft von $|\vec{F}| = 80g$ aufbringen. Wie viele Flaschenzüge müssen sie wie in Variante zwei kombinieren, um eine Masse von $m = 1000\,kg$ zu heben?

b) Die dritte Variante in der Abbildung zeigt einen Entwurf von *Leonardo da Vinci*. Hier werden sechs einfache Flaschenzüge nebeneinander verwendet. Angenommen der Balken habe die Masse $m = 325\,kg$:

   i. Welche Gewichtskraft $|\vec{G}|$ übt der Balken aus?

   ii. Welche Kraft $|\vec{F}|$ ist *mindestens* notwendig um den Balken zu heben?

(Lösung: a) $|\vec{F}| > \frac{1}{2^n}mg$; i) Die benötigte Kraft verschwindet; ii) $n > 3,6... \implies 4$ Flaschenzüge b) i) $|\vec{G}| = 325g$; ii) $|\vec{F}| > 25g$)

[1] Quelle: *Georg Glaeser: Der mathematische Werkzeugkasten*
[2] Betragsmäßig gilt: Arbeit=Kraft·Weg