Übung 9 - Lösung
(Kern und Bild / Adjungierte Matrix / Symmetrie)

S1) Bestimmen Sie jeweils eine Basis vom *Kern* und *Bild* der Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(*Lösung: Kern:* $\vec{x} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$*; Bild:* $\vec{x} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$)

S2) Eine lineare Abbildung L auf einem endlichdimensionalen Vektorraum V heißt *symmetrisch*, falls die zugehörige Darstellungsmatrix M *symmetrisch* ist (d.h. $M = M^T$). Diese Definition lässt sich für Räume unendlicher Dimension nicht mehr so leicht verallgemeinern, da die Matrix unendlich viele Zeilen und Spalten hätte. Ein wesentlich allgemeinerer Zugang ist möglich, falls Skalarprodukte $\langle .,. \rangle$ zur Verfügung stehen.
Sei $L : V_1 \to V_2$ eine lineare Abbildung (Operator), dann heißt $L^*\colon V_2 \to V_1$ der zu L *adjungierte* Operator, falls gilt

$$\langle L\vec{x}, \vec{y} \rangle_{V_2} = \langle \vec{x}, L^*\vec{y} \rangle_{V_1} \quad , \forall \vec{x} \in V_1, \vec{y} \in V_2$$

Auf der linken Seite der Gleichung wird das Skalarprodukt in V_2, auf der rechten Seite in V_1 gebildet.
Gilt $L = L^*$ so nennen wir L *selbstadjungiert.*

a) Zeigen Sie, dass die symmetrische Matrix $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ *selbstadjungiert* im $\mathbb{R}^2$ (mit dem Standardskalarprodukt) ist, d.h. beweisen Sie $M = M^*$.

b) Bestimmen Sie den Kern und das Bild von M.

(*Lösung: a) Nachrechnen; b)* $ker(M) = \{\vec{0}\}$*;* $img(M) = \mathbb{R}^2$)

Bestimmen Sie in den Beispielen S3, S4 und S5 auch die Kerne der auftretenden Operatoren!

S3) Sei $M\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die adjungierte Matrix $M^*\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ bzgl. des Standardskalarprodukts.

(*Lösung:* $M^* = M^T$*;* $ker(M) = t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$*;* $ker(M^T) = \vec{0}$)

S4) Wir betrachten einen Vektorraum V reeller Zahlenfolgen:

$$V = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}_{>0}}\colon a_n \in \mathbb{R}; \exists n_0 \in \mathbb{N}_{>0}\colon a_n = 0 \; \forall n > n_0\}$$

Alle Folgen in V haben also die Eigenschaft, dass die Folgenglieder irgendwann konstant 0 sind. Auf V definieren wir den *Rechts-Shift* Operator $R\colon V \to V$ durch

$$R : (a_1; a_2; a_3; \ldots) \mapsto (0; a_1; a_2; a_3; \ldots)$$

Bestimmen Sie den zu R *adjungierten* Operator R^* bzgl. des Skalarprodukts

$$\langle (a_n), (b_n) \rangle := \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$$

(*Lösung: „Links-Shift“ Operator L. $ker(L) = t \cdot \vec{e}_1$; $ker(R) = \vec{0}$*)

S5) Am Folgenraum V von Beispiel S4 sei der Operator $T\colon V \to V$ gegeben durch

$$T\colon (a_n) \mapsto \left(\frac{1}{n} \cdot a_n \right)$$

Berechnen Sie den adjungierten Operator T^*.
(*Lösung: $T = T^*$; $ker(T) = \ker(T^*) = \vec{0}$*)

R1) Zeigen Sie die Äquivalenz von Symmetrie und Selbstadjungiertheit im $\mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt:

$$M = M^T \iff \langle M\vec{x}, y \rangle = \langle \vec{x}, M\vec{y} \rangle$$

Das bedeutet, dass Symmetrie und Selbstadjungiertheit im $\mathbb{R}^n$ äquivalente Eigenschaften sind.

R2) Wir betrachten den Raum aller differenzierbaren Funktionen mit $f(0) = f(1) = 0$. Bestimmen Sie den adjungierten Operator D^* des Differentialoperators $D : f \mapsto f'$ bzgl. des Skalarprodukts $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f g \, dx$.
(*Lösung: $D^* = -D$*)

R3) Wie Beispiel R2 mit dem Operator $D\colon f \mapsto f''$.
(*Lösung: $D^* = D$*)