# Grundlagen der Ingenieursmathematik

Arno Kimeswenger

2. August 2017

Ziel dieser freiwilligen Lehrveranstaltung ist es, Teile des Maturastoffs zu wiederholen, damit der Einstieg ins Studium leichter fällt. Themen wie z.B. Kegelschnitte, Differenzialgleichungen, Wahrscheinlichkeitsrechnung sowie Statistik werden in diesem Kurs nicht behandelt.

Als Literatur empfehle ich Ihnen Schulbücher der Oberstufe. Die schon etwas älteren Bücher [4], [3], [2] sowie [1] kann ich Ihnen besonders empfehlen.

## 1 Mengen und Zahlen

Wir werden im Laufe des Kurses mit folgenden Mengen arbeiten:

- $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$: Menge der natürlichen Zahlen.
  Das Zeichen „:=“ bedeutet, dass $\mathbb{N}$ durch die rechte Seite definiert wird. Die Addition ist wohldefiniert (z.B. $3+4 = 7$), die Subtraktion jedoch nicht (z.B. $3-4 =?$).

- $\mathbb{Z} := \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$: Menge der ganzen Zahlen.
  Die Subtraktion ist wohldefiniert (z.B. $3-4 = -1$), die Division jedoch nicht (z.B. $3 : 4 =?$).

- $\mathbb{Q} := \{\frac{a}{b} \colon a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$: Menge der rationalen Zahlen (Brüche).
  $a \in \mathbb{Z}$ bedeutet, dass $a$ ein Element der ganzen Zahlen ist und $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ bedeutet, dass $b$ ein Element der ganzen Zahlen ohne der Null ist.
  Die rationalen Zahlen können auch als die Menge der endlichen und unendlichen aber periodischen Dezimalbrüche interpretiert werden. Die Division ist wohldefiniert (z.B. $3 : 4 = \frac{3}{4}$), das Wurzelziehen jedoch nicht (z.B. $\sqrt{2} =?$).

- $\mathbb{R}$: Menge der reellen Zahlen. $\mathbb{R}$ ist die Vereinigung von den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ sowie den irrationalen Zahlen $\mathbb{I}$. Die irrationalen Zahlen sind unendliche, nicht periodische Dezimalbrüche, (z.B. $\pi = 3,141592\ldots$ oder $\sqrt{2} = 1,414213\ldots$). Die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ hat jedoch in $\mathbb{R}$ keine Lösung.

- $\mathbb{C}$: Menge der komplexen Zahlen. Wir definieren die neue „Zahl" $i$ durch $i \cdot i = -1$ und letztendlich die Menge $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{C} := \{a + bi, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}.$$

Es gilt:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Das Zeichen „$\subset$" bedeutet „Teilmenge von".

**Beispiel 1.** *Berechne*

$$\begin{aligned}
i^3 &= i^2 \cdot i = \ldots, \\
i^4 &= i^3 \cdot i = \ldots, \\
i^5 &= i^4 \cdot i = \ldots, \\
i^6 &= i^5 \cdot i = \ldots, \\
i^7 &= i^6 \cdot i = \ldots, \\
&\ldots
\end{aligned}$$

■

Eine komplexe Zahl $z = a + bi$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ hat den Realteil $\mathrm{Re}z := a$ und den Imaginärteil $\mathrm{Im}z := b$. Jede komplexe Zahl entspricht einem Punkt in der Gaußschen Zahlenebene[1]. Dabei wird die $x$-Achse mit dem Realteil und die $y$-Achse mit dem Imaginärteil identifiziert. Da in der Elektrotechnik der Buchstabe $i$ für die elektrische Stromstärke verwendet wird, wird anstelle der komplexen Zahl $i$ oft $j$ geschrieben.

**Beispiel 2.** *Zeichnen Sie die komplexen Zahlen*

$$\begin{aligned}
z_1 &= 1 + 2i, \\
z_2 &= -1,5 + i, \\
z_3 &= -2 - 3i \textit{ und} \\
z_4 &= 3 - i
\end{aligned}$$

*in die Gaußsche Zahlenebene ein.* ■

[1] Gauß: 1777-1855

Es gelten die folgenden Rechenregeln: Sei $z_1 = a + bi$ und $z_2 = c + di$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, dann gilt:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a + bi) + (c + di) := (a + c) + (b + d)i, \\ z_1 - z_2 &= (a + bi) - (c + di) := (a - c) + (b - d)i, \\ z_1 \cdot z_2 &= (a + bi) \cdot (c + di) := (ac - bd) + (bc + ad)i, \\ z_1 : z_2 &= \frac{a + bi}{c + di} = \frac{a + bi}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2 + cdi - cdi} := \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i. \end{aligned}$$

Die Division ist jedoch nur definiert, wenn $c^2 + d^2 \neq 0$ gilt.

**Beispiel 3.** *Berechnen Sie*

$$\begin{aligned} &(1 + 2i) + (-1 - i), \\ &(1 - 2i) - (-1 - 3i), \\ &(4 + 7i) \cdot (3 - 2i), \\ &(3 + 2i) : (2 + i). \end{aligned}$$

■

**Bemerkung.** *Jede Erweiterung hat ihren Preis:*

- $\mathbb{N}$ *hat ein kleinstes Element (*$0$*),* $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ *und* $\mathbb{C}$ *jedoch nicht mehr.*
- *In* $\mathbb{Z}$ *hat jede Zahl zwei unmittelbare Nachbarn (z.B.* $-5$ *hat die Nachbarn* $-4$ *und* $-6$*). In* $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ *und* $\mathbb{C}$ *ist dies nicht der Fall.*
- *In* $\mathbb{Q}$ *kann jede Zahl als endliche oder unendliche aber periodische Dezimalzahl geschrieben werden. In* $\mathbb{R}$ *und* $\mathbb{C}$ *haben wir es mit unendlichen und nicht periodischen Dezimalzahlen zu tun.*
- *In* $\mathbb{R}$ *kann man die Zahlen ordnen (z.B.* $5,738\ldots \leq 10,517\ldots$*). In* $\mathbb{C}$ *können wir dies nicht mehr.*

Das Runden wird in folgendem Beispiel thematisiert.

**Beispiel 4.** *Tippen Sie* $\sin 2$ *in den Taschenrechner ein und runden Sie auf zwei Kommastellen.*

*Tippen Sie* $\sin 3$ *in den Taschenrechner ein und runden Sie auf eine Kommastelle.*

*Abschließend betrachten Sie noch* $\sin 4$*. Runden Sie auf drei Kommastellen. Hier darf die letzte Null nicht gestrichen werden!* ■

**Bemerkung.** *In Österreich verwenden wir das Zeichen „,“ als Komma und „.“ als Tausender-Trennzeichen. In anderen Ländern und auf den meisten Taschenrechnern ist dies genau umgekehrt. Daher müssen wir mit fremden Daten immer vorsichtig sein!*

Der Absolutbetrag einer reellen Zahl $x$ ist definiert durch

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0, \\ -x, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

$|x|$ ist daher immer positiv. In Abbildung 1 ist der Funktionsgraph abgebildet.

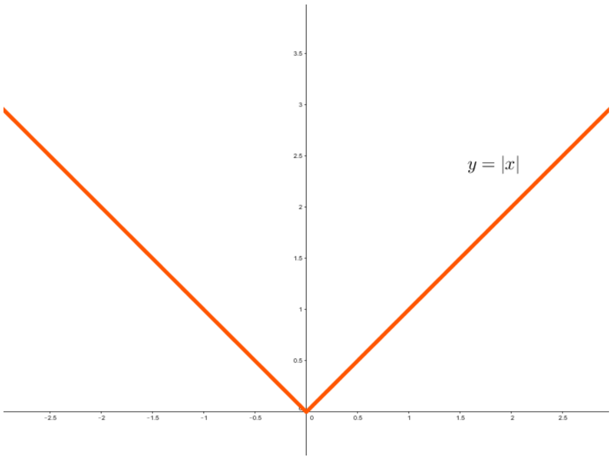


Abbildung 1: Absolutbetrag.

**Beispiel 5.** *Berechnen Sie* $|4|$, $|-4|$, $|-2,312\ldots|$, $|0|$. ■

Der Absolutbetrag einer komplexen Zahl $z$ ist definiert durch

$$|z| := \sqrt{(\text{Re}z)^2 + (\text{Im}z)^2}.$$

**Beispiel 6.** *Berechnen Sie* $|4+2i|$, $|-4+2i|$ *und* $|3i|$. ■

## 2 Prozentrechnung

Die Prozentrechnung - der Liebling aller Studierenden - wird hier exemplarisch behandelt.

**Beispiel 7.** *Ein Produkt wird um* 130 *Euro exklusive Mehrwertsteuer verkauft. Wie hoch ist der Preis inklusive* 20% *Mehrwertsteuer?* ■

**Beispiel 8.** *Für einen Stammkunden gewähren wir* 20% *Rabatt auf das oben behandelte Produkt. Wie teuer ist das Produkt nun?* ■

**Bemerkung.** *In den letzten beiden Beispielen haben wir gesehen, dass* 20% *Rabatt nicht bedeutet, dass die Mehrwertsteuer wieder abgezogen wird!*

**Beispiel 9.** *Ein Unternehmen lockt Kunden mit dem Slogan: „Keine Mehrwertsteuer!". Wie viel Prozent Rabatt bekommt der Kunde? Schätzen Sie bevor Sie zu rechnen beginnen.*

*a)* 20%,

*b)* $<$ 20%, *oder*

*c)* $>$ 20%.

■

**Bemerkung.** *Es gibt die Begriffe „von Hundert", „auf Hundert" und „in Hundert", welche wir jedoch nicht verwenden wollen.*

**Beispiel 10.** *Die Preissteigerungen eines Produkts der vergangenen Jahre sind in der nachstehenden Tabelle abgebildet.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2010 | bis | 2011 | +1% |
| 2011 | bis | 2012 | +2% |
| 2012 | bis | 2013 | +0% |
| 2013 | bis | 2014 | +3% |
| 2014 | bis | 2015 | +2% |

*Wie hoch war die durchschnittliche Preissteigerung? Schätzen Sie bevor Sie zu rechnen beginnen.*

*a)* 2%,

*b)* $<$ 2%, *oder*

*c)* $>$ 2%.

■

# 3 Terme und Rechengesetze

Für $a, b, c \in \mathbb{R}$ gelten:

- das Kommutativgesetz

$$a + b = b + a, \quad a \cdot b = b \cdot a,$$

- das Assoziativgesetz

$$\begin{aligned} a + b + c &= (a + b) + c = a + (b + c), \\ a \cdot b \cdot c &= (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \end{aligned}$$

- das Distributivgesetz

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

**Beispiel 11.** *Vereinfachen Sie den Ausdruck*

$$(-2a) \cdot (4b) \cdot (-3c) + (-b) \cdot (3a) \cdot (-5c) - (-2c) \cdot (-3a) \cdot (-b).$$

■

Folgende wichtige Formeln sollten auswendig gekonnt werden:

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2, \\ (a - b)^2 &= (a - b) \cdot (a - b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2, \\ (a + b) \cdot (a - b) &= a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2. \end{aligned}$$

**Beispiel 12.** *Stellen Sie den Term* $16 - 36b^2$ *als Produkt dar.* ■

**Beispiel 13.** *Kürzen Sie und vereinfachen Sie den Term*

$$\frac{10a^4 - 10a^2}{5a^3 - 10a^2 + 5a}.$$

■

**Beispiel 14.** *Vereinfachen Sie den Doppelbruch*

$$\frac{\frac{x^2+y^2}{x^2}}{\frac{y^2}{x^2 \cdot y^2}}.$$

■

**Beispiel 15.** *Bilden Sie den größten gemeinsamen Teiler (ggT) sowie das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) von den Zahlen* $18; 42$ *und* $72$. ■

**Beispiel 16.** *Vereinfachen Sie den Ausdruck* $\frac{1}{18} + \frac{1}{42} + \frac{1}{72}$. *Sie können die Ergebnisse von Beispiel 15 verwenden.* ■

**Beispiel 17.** *Vereinfachen Sie den Bruch* $\frac{18a+42b}{72}$. *Sie können die Ergebnisse von Beispiel 15 verwenden.* ■

Summen tauchen in den Anwendungen sehr häufig auf, weswegen eine eigene Schreibweise eingeführt wurde. Sind reelle Koeffizienten $a_1; \ldots; a_n$ gegeben mit $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 1$, dann schreiben wir

$$\sum_{i=1}^{n} a_i := a_1 + \ldots + a_n.$$

Wir müssen nicht immer bei 1 starten. Sind die reellen Koeffizienten $b_{-4}; \ldots; b_7$ gegeben, dann schreiben schreiben wir z.B.

$$\sum_{j=-4}^{7} b_j := b_{-4} + \ldots + b_7.$$

**Beispiel 18.** *Berechnen Sie*

$$\sum_{i=1}^{10} i \quad \textit{und} \quad \sum_{k=1}^{4} \frac{1}{k}.$$

■

Die Summenformel von Gauß wurde zum ersten Mal von dem neunjährigen Gauß (!) verwendet. Sie lautet:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

Um zu verstehen, wie man auf diese Formel kommt, ist keine schwere Mathematik vonnöten. Wir betrachten die Summe lediglich zweimal:

$$\begin{array}{rcrcccrcr} 1 & + & 2 & + & \ldots & + & n-1 & + & n \\ n & + & n-1 & + & \ldots & + & 2 & + & 1 \\ \hline n+1 & + & n+1 & + & \ldots & + & n+1 & + & n+1 \end{array}$$

und summieren. Wir können daher folgern

$$2 \cdot \sum_{i=1}^{n} i = n \cdot (n+1)$$

und daher

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

**Beispiel 19.** *Berechnen Sie*

$$\sum_{i=1}^{10} i \quad \textit{und} \quad \sum_{i=11}^{100} i.$$

■

Eine weitere sehr wichtige Formel, welche zum Beispiel in der Rentenrechnung häufig Anwendung findet, ist die Summenformel der endlichen geometrischen Reihe. Ausnahmsweise formulieren wir diese Aussage - wie in der Mathematik üblich - in einem Satz und beweisen diesen im Anschluss.

**Satz** (Summenformel der endlichen geometrischen Reihe)**.** *Für $q \in \mathbb{R}$ mit $q \neq 1$ gilt*

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

*Beweis.* Das Ergebnis der Summe bezeichnen wir im folgenden mit $S$, um die Schreibweise etwas zu verkürzen. Es gilt:

$$S = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n.$$

Multiplizieren der Gleichung mit $q$ liefert

$$\begin{aligned} S \cdot q &= q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n+1} \\ &= (1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n) - 1 + q^{n+1} \\ &= S - 1 + q^{n+1}. \end{aligned}$$

Wir können wie folgt umformen:

$$S \cdot (q - 1) = q^{n+1} - 1$$

bzw.

$$S = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

Da wir gefordert haben, dass $q \neq 1$ gilt, dürfen wir durch $q - 1$ dividieren. □

**Beispiel 20.** *Berechnen Sie die Summen*

$$\sum_{i=0}^{5} \left(\frac{1}{2}\right)^i \quad \textit{und} \quad \sum_{i=1}^{10} \left(\frac{3}{2}\right)^i.$$

■

# 4 Lineare Funktionen und lineare Gleichungen

**Beispiel 21.** *Lösen Sie die lineare Gleichung*

$$7x + 3 = 2x - 2$$

*in den reellen Zahlen.* ∎

**Beispiel 22.** *Gegeben ist die Gleichung* $g\colon 6x - 3y + 9 = 0$. *Formen Sie diese Gleichung um zur Form „*$y = kx + d$*" und zeichnen Sie den Graphen.* ∎

**Beispiel 23.** *Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden*

$$g\colon 5x + 2y - 3 = 0,$$
$$f\colon y = \frac{2}{3}x + 1$$

*und zeichnen Sie die beiden Funktionen.* ∎

**Beispiel 24.** *Gegeben ist die Funktion* $f(x) = \frac{1}{2}x+1$. *Erstellen Sie eine Wertetabelle (*$-5$ *bis* $5$ *mit Schrittweite* $1$*) und zeichnen Sie den Graphen. Wie groß ist die Steigung?* ∎

**Beispiel 25.** *Stellen Sie die Geradengleichung auf für*

*a)* $P = (5; 1)$ *und* $k = 2$,

*b)* $P = (-2; 2)$ *und* $d = -2$ *und*

*c)* $P = (4; 4)$ *und* $Q = (10; 10)$.

∎

**Beispiel 26.** *Bestimmen Sie die Nullstelle und den Schnittpunkt mit der y-Achse der Funktion* $y = -\frac{1}{2}x - 3$. ∎

**Beispiel 27.** *Eine Baumaschine mit Anschaffungswert* 60.000 *Euro soll in acht Jahren voll abgeschrieben werden. Die Abschreibung soll linear erfolgen. Bestimmen Sie die lineare Funktion, welche den Buchwert beschreibt. Wie hoch ist der Buchwert am Ende des siebenten Jahres?* ∎

**Beispiel 28.** *Drei verschiedene Angebote eines Mobilfunkbetreibers sind in der folgenden Tabelle dargestellt.*

| Tarif | A | B | C |
|---|---|---|---|
| Grundgebühr (in Euro) | 5,00 | 10,00 | 25,00 |
| Gesprächsgebühr (in Euro pro Minute) | 0,05 | 0,02 | 0,00 |

*Stellen Sie die Funktionsgleichungen auf, welche die Kosten in Abhängigkeit der Gesprächsdauer beschreiben. Zeichnen Sie diese und interpretieren Sie das Ergebnis.* ∎

## 5 Lineare Gleichungssysteme

**Beispiel 29.** *Lösen Sie das Gleichungssystem*

$$\begin{aligned} 5x - 3y =& 1, \\ 3x + 2y =& 12. \end{aligned}$$

■

**Beispiel 30.** *Lösen Sie das Gleichungssystem*

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 3, \\ 3x - 2y + z &= 2, \\ 3x + y - z &= -6. \end{aligned}$$

■

Nicht alle Gleichungssystem lassen sich lösen und auch wenn ein Gleichungssystem lösbar ist, muss die Lösung noch lange nicht eindeutig sein. Betrachten wir dazu folgende Beispiele:

**Beispiel 31.** *Lösen Sie das Gleichungssystem*

$$\begin{aligned} 5x - 3y =& 1, \\ 10x - 6y =& 2. \end{aligned}$$

■

**Beispiel 32.** *Lösen Sie das Gleichungssystem*

$$\begin{aligned} 5x - 3y =& 1, \\ 10x - 6y =& 1. \end{aligned}$$

■

## 6 Ungleichungen

**Beispiel 33.** *Geben Sie die Lösungsmenge der Ungleichung*

$$3x - 20 \leq 10 + 6x$$

*an.* ■

**Beispiel 34.** *Geben Sie die Lösungsmenge der Ungleichung*

$$6x - 30 \leq 20 + 3x$$

*an.* ■

**Beispiel 35.** *Skizzieren Sie die Lösungsmenge der Ungleichung*

$$3y \geq 6x - 9.$$

■

**Beispiel 36.** *Skizzieren Sie das zulässige Gebiet der Ungleichungen*

$$\begin{aligned} y &\geq 2x - 3, \\ y &\leq 1, \\ y &\geq -x - 5. \end{aligned}$$

■

**Beispiel 37.** *Zeichnen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung*

$$|5x - 2x| \geq x + 1.$$

■

# 7 Polynomgleichungen

Seien die Koeffizienten $a_0; a_1; \ldots; a_n \in \mathbb{R}$ gegeben, dann ist ein Polynom vom Grad $n$ definiert durch

$$P_n(x) := a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i.$$

Als Spezialfall erhalten wir ein Polynom zweiten Grades

$$P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2.$$

In diesem Fall bevorzugen wir die Schreibweise

$$P_2(x) = ax^2 + bx + c.$$

Die Nullstellen von $P_2$ mit $a \neq 0$ können unter Zuhilfenahme der großen Lösungsformel berechnet werden:

$$x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Für interessierte Leser sei hier der dazugehörige Beweis der Formel angegeben.

*Beweis.*

$$\begin{aligned}
& ax^2 + bx + c = 0 \\
\Leftrightarrow\, & x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \\
\Leftrightarrow\, & \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{1}{4}\frac{b^2}{a^2}\right) - \frac{1}{4}\frac{b^2}{a^2} + \frac{c}{a} = 0 \\
\Leftrightarrow\, & \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\
\Leftrightarrow\, & x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
\Leftrightarrow\, & x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
\end{aligned}$$

□

**Bemerkung.** *Die Zeichen* $\Rightarrow, \Leftarrow$ *und* $\Leftrightarrow$ *tauchen in der Mathematik sehr häufig auf.*

*Aussage 1* $\Rightarrow$ *Aussage 2 bedeutet, dass aus Aussage 1 Aussage 2 folgt. Ist also Aussage 1 richtig, dann auch Aussage 2.*

*Analoges gilt für Aussage 1* $\Leftarrow$ *Aussage 2: Aus Aussage 2 folgt Aussage 1. Ist also Aussage 2 richtig, dann auch Aussage 1.*

*Gelten beide Richtungen schreiben wir* $\Leftrightarrow$*. Das bedeutet, dass Aussage 1 aus Aussage 2 folgt und umgekehrt.*

**Beispiel 38.** *Setzen Sie das korrekte Zeichen ein (*$\Rightarrow, \Leftarrow$ *oder* $\Leftrightarrow$*)*

*a)* $a = b \qquad a^2 = b^2$,

*b) „Die Straße ist nass.“ „Es regnet.“,*

*c)* $a < b \qquad 2a < 2b$.

■

**Beispiel 39.** *Stellen Sie für die Funktion*

$$P_2(x) = x^2 - \frac{3}{2}x - 1$$

*eine Wertetabelle auf (*$-2 \leq x \leq 3$ *mit Schrittweite 1), zeichnen Sie den Graphen der Funktion und berechnen Sie die Nullstellen.* ■

**Beispiel 40.** *Stellen Sie für die Funktion*

$$P_2(x) = 2x^2 + 2x + \frac{1}{2}$$

*eine Wertetabelle auf* $(-2 \leq x \leq 2$ *mit Schrittweite* $1)$, *zeichnen Sie den Graphen der Funktion und berechnen Sie die Nullstellen.* ■

**Beispiel 41.** *Stellen Sie für die Funktion*

$$P_2(x) = 2x^2 + 2x + 1$$

*eine Wertetabelle auf* $(-2 \leq x \leq 2$ *mit Schrittweite* $1)$, *zeichnen Sie den Graphen der Funktion und berechnen Sie die Nullstellen.* ■

Für Polynome vom Grad $n$ gibt es im Allgemeinen keine Lösungsformeln um die Nullstellen zu berechnen. Wir können aber numerische Verfahren benutzen, um die Nullstellen näherungsweise zu berechnen. Das wahrscheinlich bekannteste Verfahren ist das Newton-Verfahren. Wir starten mit einer Startnäherung $x_0$ und setzen dann in die Vorschrift

$$x_{n+1} = x_n - \frac{P_n(x_n)}{P_n'(x_n)}$$

ein. Um das Newton-Verfahren anwenden zu können, benötigen wir die Ableitung von $P_n(x)$, welche mit $P_n'(x)$ bezeichnet wird. Ableitungen werden in späteren Kapiteln genauer behandelt.

**Beispiel 42.** *Stellen Sie für die Funktion*

$$P_3(x) = 2x^3 + 6x^2 + x - 1$$

*eine Wertetabelle auf* $(-3 \leq x \leq 1$, *Schrittweite* $0,5)$, *zeichnen Sie den Graphen der Funktion und berechnen Sie die Nullstellen numerisch. Die Ableitung ist gegeben durch*

$$6x^2 + 12x + 1$$

*und als Startnäherung können z.B. die Werte* $-2,75$; $-0,5$ *sowie* $0,5$ *verwendet werden.* ■

# 8 Potenzen und Wurzeln

Sei $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gegeben, dann definieren wir

$$a^1 := a, \quad a^n := a \cdot a \cdots a \quad (n\text{-mal}),$$

z.B. $3,5^1 = 3,5$ und $3,5^4 = 3,5 \cdot 3,5 \cdot 3,5 \cdot 3,5 = 150,06\ldots$

Für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definieren wir $a^0 := 1$, z.B. $3,5^0 = 1$. $0^0$ ist hingegen nicht definiert.

Sei $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, dann definieren wir

$$a^{-n} := \frac{1}{a^n},$$

z.B. $3,5^{-4} = \frac{1}{3,5^4} = \frac{1}{150,06\ldots} = 0,006\ldots$

Die $n$-te Wurzel aus einer nicht negativen Zahl $a$ und $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ist jene nicht negative Zahl $b$, deren $n$-te Potenz gleich $a$ ist. D.h. für $a \in \mathbb{R}$ mit $a \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ definieren wir

$$b = \sqrt[n]{a} \quad :\Leftrightarrow \quad b^n = a.$$

Das Zeichen $:\Leftrightarrow$ bedeutet, dass $b = \sqrt[n]{a}$ (per Definition) genau dann gilt, wenn $b^n = a$ gilt. Seien $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ und $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sowie $m \in \mathbb{Z}$ gegeben, dann definieren wir

$$a^{\frac{m}{n}} := \sqrt[n]{a^m}.$$

Bis jetzt haben wir als Exponenten rationale Zahlen zugelassen. Es fehlen noch die reellen Exponenten, wie z.B. $3^{\sqrt{2}}$. Wir wissen, dass

$$\sqrt{2} = 1,414213562\ldots$$

gilt und definieren daher $3^{\sqrt{2}}$ als Grenzwert der Folge

$$3^1; 3^{1,4}; 3^{1,41}; 3^{1,414}; 3^{1,4142}; \ldots$$

$3^1$ ist bereits definiert, was ist aber mit $3^{1,414}$? Wir wissen, dass $1,414 = \frac{1414}{1000}$ gilt und daher

$$3^{1,414} = 3^{\frac{1414}{1000}} = \sqrt[1000]{3^{1414}}$$

und das wurde bereits definiert. Bei den anderen Folgengliedern und mit allgemeinen reellen Zahlen kann analog vorgegangen werden.

Um die Wurzel aus einer Zahl zu berechnen kann wieder das Newton-Verfahren verwendet werden. Für diesen speziellen Fall nennt man das Verfahren auch Heron-Verfahren oder babylonisches Wurzelziehen. Wollen wir z.B. die 2-te Wurzel aus einer Zahl $a$ ziehen, dann betrachten wir die Funktion

$$f(x) := x^2 - a$$

und berechnen ihre positive Nullstelle, denn dann folgt $x^2 = a$ bzw. $x = \sqrt{a}$. Für das Newton-Verfahren wird wieder die Ableitung benötigt. In diesem Fall ist $f'(x) = 2x$ und wir erhalten

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = x_n - \frac{x_n}{2} + \frac{a}{2x_n} = \frac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2}.$$

**Beispiel 43.** *Berechnen Sie den Wert von $\sqrt{2}$ numerisch. Als Startwert können Sie* 1 *verwenden.* ■

Dieses Verfahren kann auch für $k$-te Wurzeln verwendet werden. Dazu wird die Vorschrift

$$x_{n+1} = \frac{(k-1)x_n^k + a}{k x_n^{k-1}}$$

verwendet.

**Beispiel 44.** *Berechnen Sie den Wert von $\sqrt[3]{2}$. Als Startwert können Sie* 1 *verwenden.* ■

**Beispiel 45.** *Zeichnen Sie die Funktion $\sqrt{x}$ und geben Sie eine Wertetabelle an ($0 \leq x \leq 8$ mit Schrittweite 1). Verwenden Sie für die Wertetabelle den Taschenrechner.*

*Anschließend zeichnen Sie die Funktion $y = x^2$ ein. Berechnen Sie dafür die Werte für* $0; 1; 2$ *sowie* 3. *Was fällt Ihnen auf? (Siehe auch Abbildung 2).* ■

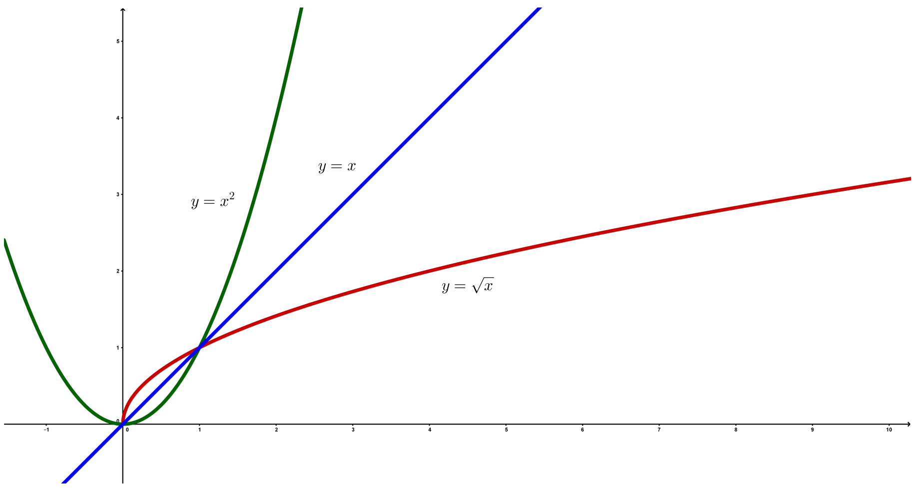


Abbildung 2: $x^2$ und $\sqrt{x}$.

Im vorherigen Beispiel haben wir festgestellt, dass für $x \geq 0$ die Funktion $y = \sqrt{x}$ die Umkehrfunktion der Funktion $y = x^2$ ist. Allgemein erhalten wir, dass für $x \geq 0$ die Funktion $y = \sqrt[n]{x}$ die Umkehrfunktion der Funktion $y = x^n$ ist.

Folgende Rechenregeln für Potenzen werden wir regelmäßig verwenden:

$$\begin{aligned} a^{m+n} &= a^m \cdot a^n, \\ a^{n-m} &= \frac{a^n}{a^m}, \\ (a \cdot b)^m &= a^m \cdot b^m, \\ \left(\frac{a}{b}\right)^m &= \frac{a^m}{b^m}, \\ (a^m)^n &= a^{m \cdot n}. \end{aligned}$$

**Beispiel 46.** *Vereinfachen Sie*

*a)* $\frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5}}$,

*b)* $\frac{x}{\sqrt[7]{x}}$.

■

# 9 Bruch- und Wurzelgleichungen

Zur Abwechslung wird dieses Kapitel wieder anhand von einigen Beispielen besprochen. Definieren Sie den Definitionsbereich, bevor Sie die Bruchgleichungen lösen. Am Ende sind nur jene Werte Lösungen, welche auch in der Definitionsmenge enthalten sind!

**Beispiel 47.** *Lösen Sie*

*a)* $\frac{4}{x-2} = \frac{2}{x+1}$,

*b)* $\frac{3x-5}{6x^2} + \frac{3x-1}{3x} = \frac{-(9-5x)}{6x}$,

*c)* $\frac{1}{x} = 0$,

*d)* $\frac{x-2}{x+2} + \frac{x+5}{x-4} = \frac{x^2-4x+12}{x^2-2x-8}$.

■

Um Wurzelgleichungen zu lösen, verzichten wir auf die Definitionsmenge. Dafür muss am Ende der Rechnung immer eine Probe gemacht werden. Die Probe ist auch notwendig, weil wir durch das Quadrieren keine Äquivalenzumformung verwenden, wie folgendes

Beispiel zeigt:

$$\begin{aligned} -1 &= \sqrt{x} \quad |(\cdot)^2 \\ 1 &= x. \end{aligned}$$

Jedoch liefert die Probe $-1 = \sqrt{1} = 1$ eine falsche Aussage! Daher ist die Lösungsmenge leer.

**Beispiel 48.** *Lösen Sie*

*a)* $\sqrt{x+1} = 5$,

*b)* $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} = 1$,

*c)* $\sqrt{x+2+\sqrt{2x+7}} = 4$.

*und machen Sie die Probe.* ■

# 10 Exponential- und logarithmische Gleichungen

Eine der wichtigsten Zahlen ist die Euler[2] Zahl $e$, welche durch den Grenzübergang

$$e := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,7182818\ldots$$

definiert ist. Diese irrationale Zahl ist die Grundlage für die Exponential- sowie die Logarithmusfunktion (wenn man will auch für die Sinus- und Kosinusfunktion).

Die Lösung der Gleichung $a^x = b$ mit gegebenen $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ mit $a > 0$ und $b \in \mathbb{R}$ mit $b > 0$ nennt man den Logarithmus von $b$ zur Basis $a$. D.h. wir definieren

$$x = \log_a b \quad :\Leftrightarrow \quad a^x = b.$$

Wird in der Gleichung $a^x = b$ die Beziehung $x = \log_a b$ eingesetzt, erhält man

$$a^{\log_a b} = b.$$

Umgekehrt gilt

$$\log_a \left(a^b\right) = b,$$

weil $a^x = a^b$ die Lösung $x = b$ hat. Es wurde somit gezeigt, dass die Funktion $y = \log_a x$ die Umkehrfunktion der Funktion $y = a^x$ ist.

[2]Euler: 1707-1783

**Beispiel 49.** *Berechnen Sie*

*a)* $\log_7 49$,

*b)* $\log_2 \frac{1}{8}$,

*c)* $\log_5 \sqrt{5}$,

*d)* $\log_{\frac{1}{2}} 2$.

■

Der Logarithmus mit der Basis $e$, also $\log_e$, wird ln genannt und der Logarithmus mit der Basis 10, also $\log_{10}$, wird lg genannt.

Betrachten wir für den ln die Beziehung $a^{\log_a b} = b$ nochmals genauer, dann erhalten wir

$$e^{\ln b} = b.$$

Die Beziehung $\log_a a^b = b$ ergibt

$$\ln e^b = b,$$

insbesondere $\ln e = 1$.

**Beispiel 50.** *Geben Sie eine Näherung für* $\ln 4$ *an.* ■

Es gelten folgende Rechenregeln:

$$\begin{aligned}
\log_a(u \cdot v) &= \log_a u + \log_a v, \\
\log_a u^r &= r \cdot \log_a u, \\
\log_a \left(\frac{u}{v}\right) &= \log_a u - \log_a v, \\
\log_a \sqrt[r]{u} &= \frac{1}{r} \cdot \log_a u.
\end{aligned}$$

**Beispiel 51.** *Erstellen Sie für die Funktion* $y = \ln x$ *eine Wertetabelle* ($0 \leq x \leq 5$, *mit Schrittweite* $0,5$) *und zeichnen Sie den Graphen. Weiters erstellen Sie für die Funktion* $y = e^x$ *eine Wertetabelle* ($-5 \leq x \leq 2$, *mit Schrittweite* $1$) *und zeichnen Sie den Graphen. Was fällt Ihnen auf? Betrachten Sie Abbildung 3.* ■

Sollen Logarithmen von einer Basis in eine andere umgerechnet werden, kann wie folgt vorgegangen werden. Aus der Umformung

$$a^{\log_a x} = x \quad \Leftrightarrow \quad \log_a x \cdot \ln a = \ln x$$

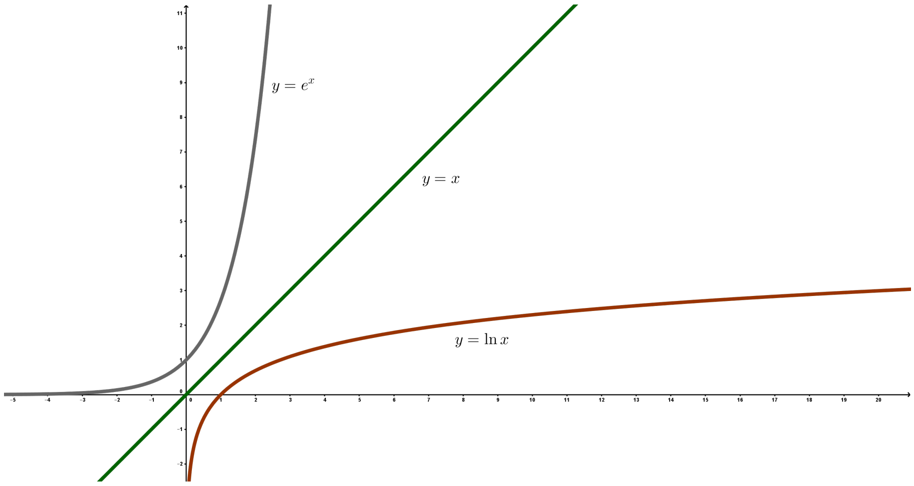


Abbildung 3: Die Funktion $e^x$ und $\ln x$.

erhalten wir

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

**Beispiel 52.** *Lösen Sie*

*a)* $\frac{2^{3x}}{16} = \frac{2^x}{128}$,

*b)* $5^{x-1} + 5^{x-2} = 5^{x+1} - 5^{x-2} - 9$.

■

**Beispiel 53.** *In welcher Zeit verdoppelt sich ein Kapital, angelegt mit dem jährlichen Zinssatz von 2%?* ■

**Beispiel 54.** *Lösen Sie die Gleichung*

$$\ln 5x^5 - 4 \ln 5x = \ln 5.$$

■

**Beispiel 55.** *Lösen Sie die Gleichung*

$$K_0 \cdot q^t - A \cdot \frac{q^t - 1}{q - 1} = 0$$

*nach $t$ auf. Dieser Vorgang findet bei der Annuitätentilgung Anwendung, um die Laufzeit zu berechnen.* ■

# 11 Trigonometrie

Wir beschäftigen uns in diesem Kapitel mit Dreiecken und müssen uns daher erst einmal Gedanken über den Begriff des Winkels machen. Wie in Abbildung 4 eingezeichnet,

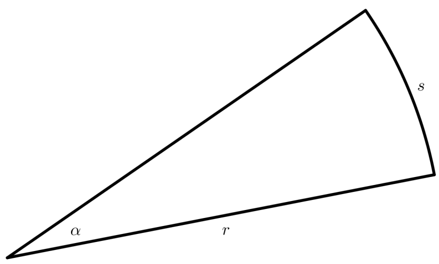


Abbildung 4: Winkel.

definieren wir den Winkel als das Verhältnis von Bogenlänge $s$ und Radius $r$, d.h.

$$\alpha := \frac{s}{r}.$$

Die Einheit des Winkels ist Radiant. Oft wird auch die Einheit Grad verwendet. In einem allgemeinen Dreieck mit den Winkeln $\alpha, \beta$ und $\gamma$ erhalten wir $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ rad bzw. $180°$.

In einem rechtwinkeligen Dreieck (siehe z.B. Abbildung 5, ein Winkel ist $\frac{\pi}{2}$ rad bzw. $90°$) mit der Gegenkathete $a$, der Ankathete $b$ sowie der Hypotenuse $c$ gilt der Satz des Pythagoras[3]

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Als nächstes werden die Winkelfunktionen eingeführt. Der Tangens, der Sinus und der Kosinus sind definiert durch

$$\tan(\alpha) := \frac{GK}{AK} = \frac{a}{b},$$
$$\sin(\alpha) := \frac{GK}{HY} = \frac{a}{c},$$
$$\cos(\alpha) := \frac{AK}{HY} = \frac{b}{c}.$$

Fassen wir diese als Funktionen in Abhängigkeit von $x$ auf, dann erhalten wir die Graphen aus Abbildung 6. Alle drei Funktionen sind periodisch und es gilt

[3]Pythagoras: um 570 vor Christus

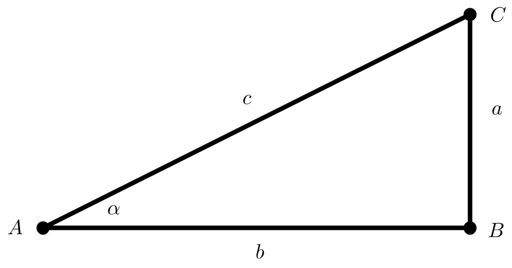


Abbildung 5: Rechtwinkeliges Dreieck.

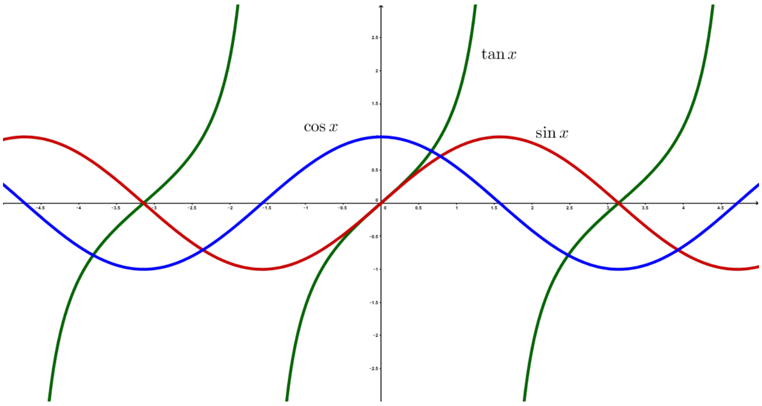


Abbildung 6: Winkelfunktionen.

$$-1 \leq \sin x \leq 1,$$
$$-1 \leq \cos x \leq 1,$$
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

In Tabelle 1 können einige Werte nachgeschlagen werden.

| | $0°$ | $30°$ | $45°$ | $60°$ | $90°$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\alpha$ | $\frac{\sqrt{0}}{2}$ | $\frac{\sqrt{1}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{4}}{2}$ |
| $\cos\alpha$ | $\frac{\sqrt{4}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{1}}{2}$ | $\frac{\sqrt{0}}{2}$ |
| $\tan\alpha$ | $0$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | $\infty$ |

Tabelle 1: Werte der Winkelfunktionen.

Aus der Definition erhalten wir sofort die Beziehung

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{GK}{HY}}{\frac{AK}{HY}} = \frac{GK}{AK} = \tan\alpha.$$

Weitere Zusammenhänge sind gegeben durch

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \cos\beta = \cos(90 - \alpha)$$
$$\cos\beta = \frac{a}{c} = \sin\alpha = \sin(90 - \alpha).$$

Nun können wir eine weitere wichtige irrationale Zahl definieren, die Kreiszahl $\pi$: $\pi$ ist die Nullstelle der Funktion $y = \sin x$ im Intervall $[2;4]$. Es gilt

$$\pi = 3,14159265\ldots$$

Wir haben $\pi$ in der Schule in Zusammenhang mit Kreisen kennengelernt. Für den Umfang eines Kreises mit Radius $r$ gilt $U = 2r\pi$ und für die Fläche $A = r^2\pi$.

Im Intervall $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ sind die Tangensfunktion sowie die Sinusfunktion streng monoton wachsend und daher können wir die Umkehrabbildungen arctan sowie arcsin definieren. Für die Kosinusfunktion betrachten wir das Intervall $[0;\pi]$, in welchem diese Funktion streng monoton fallend ist. Somit existiert die Umkehrabbildung arccos. In Abbildung 7 sind diese drei sogenannten Kreisfunktionen abgebildet.

In einem allgemeinen Dreieck (siehe Abbildung 8) gelten

a) der Sinussatz

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma},$$

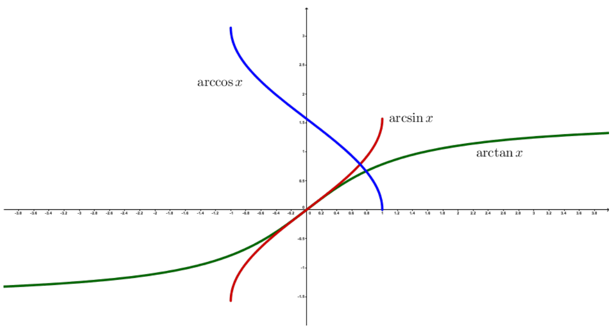


Abbildung 7: Kreisfunktionen.

b) der Kosinussatz

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

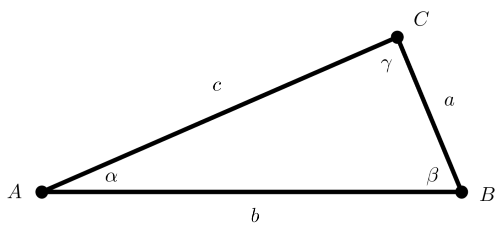


Abbildung 8: Allgemeines Dreieck.

In beiden Fällen gilt: die Seite $a$ liegt gegenüber dem Winkel $\alpha$, die Seite $b$ gegenüber dem Winkel $\beta$ und die Seite $c$ gegenüber dem Winkel $\gamma$.

**Beispiel 56.** *Gegeben ist ein Dreieck mit $a = 21,6; b = 13,3$ und $\alpha = 40,90°$. Berechnen Sie die fehlenden Größen $c, \beta, \gamma$ sowie den Flächeninhalt.* ■

# 12 Ebene und räumliche Koordinatengeometrie

In der Ebene hat jeder Punkt $P$ eine $x$- und eine $y$-Koordinate. Wir schreiben $P = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix}$.
Ein Vektor besitzt ebenfalls eine $x$- und eine $y$-Koordinate, wir schreiben $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$.
Vektoren werden meist mit einem Vektorpfeil versehen oder fett gedruckt. Ein Vektor gibt an, wie man von einem Ausgangspunkt $P$ zu einem neuen Punkt $Q$ kommt: Starte

im Punkt $P$ und gehe $x_v$ Einheiten in Richtung der $x$-Achse und $y_v$ Einheiten in Richtung der $y$-Achse. Letztendlich erhalten wir den Punkt $Q = \begin{pmatrix} x_p + x_v \\ y_p + y_v \end{pmatrix}$.

**Beispiel 57.** *Gegeben sei der Punkt* $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *und der Vektor* $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Wie lautet der Punkt* $Q$*?* ■

Um den Vektor $\vec{v}$ bei gegebenen Punkten $P$ und $Q$ zu bestimmen, kann die „Spitze minus Schaft"-Regel verwendet werden:

$$\vec{v} = Q - P.$$

Umgeformt erhalten wir

$$Q = P + \vec{v}.$$

Eigentlich sind $P$ und $Q$ ebenfalls Vektoren. Ausgehend vom Punkt $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ geht man $x_p$ Einheiten in Richtung der $x$-Achse und $y_P$ Einheiten in Richtung der $y$-Achse um zum Punkt $P$ zu gelangen. Analoges gilt für den Punkt $Q$.

Ein Vektor besitzt eine Richtung und eine Länge (vergleiche mit einer Kraft). Die Länge ist gegeben durch

$$|\vec{v}| := \sqrt{x_v^2 + y_v^2}.$$

Dies ist eine Anwendung des Satzes des Pythagoras und $|\vec{v}|$ nennen wir auch den Betrag von $\vec{v}$.

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\vec{v} + \vec{w} &= \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_w \\ y_w \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_v + x_w \\ y_v + y_w \end{pmatrix}, \\
\vec{v} - \vec{w} &= \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_w \\ y_w \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_v - x_w \\ y_v - y_w \end{pmatrix}, \\
c \cdot \vec{v} &= c \cdot \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} c \cdot x_v \\ c \cdot y_v \end{pmatrix}, \quad \text{mit } c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Der Einheitsvektor eines Vektors $\vec{v}$ ist definiert durch

$$\vec{v}_0 := \frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v}$$

und hat daher die Länge 1 und die gleiche Richtung wie $\vec{v}$.

Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ ist definiert durch

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_w \\ y_w \end{pmatrix} := x_v \cdot x_w + y_v \cdot y_w.$$

Gilt $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$, dann stehen die beiden Vektoren orthogonal aufeinander.

**Beispiel 58.** $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Berechnen Sie* $\vec{v}+\vec{w}, \vec{v}-\vec{w}, 3\cdot\vec{v}, |\vec{v}|, \vec{v}_0$, *sowie* $\vec{v}\cdot\vec{w}$. *Stehen die beiden Vektoren orthogonal aufeinander?* ■

Sind zwei Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ gegeben, dann kann der Winkel zwischen diesen beiden Vektoren durch die Formel

$$\cos(\measuredangle(\vec{v};\vec{w})) = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|}$$

definiert/berechnet werden. Diese Formel ist unter dem Namen VW-Formel bekannt. Interessierte Leser können diese diese Definition des Winkels wie folgt motivieren:

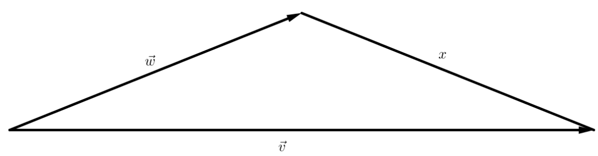


Abbildung 9: Herleitung der VW-Formel.

Betrachten wir Abbildung 9, dann erhalten wir

$$x^2 = |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 - 2\cdot|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cdot\cos\alpha,$$
$$x^2 = |\vec{v}-\vec{w}|^2 = (\vec{v}-\vec{w})\cdot(\vec{v}-\vec{w}) = \vec{v}\cdot\vec{v} - 2\cdot\vec{v}\cdot\vec{w} + \vec{w}\cdot\vec{w} = |\vec{v}|^2 - 2\cdot\vec{v}\cdot\vec{w} + |\vec{w}|^2,$$

da $|v|^2 = x_v^2 + y_v^2 = \vec{v}\cdot\vec{v}$. Wir können daher folgern

$$|\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 - 2\cdot|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cdot\cos\alpha = |\vec{v}|^2 - 2\cdot\vec{v}\cdot\vec{w} + |\vec{w}|^2$$

und daher

$$\cos\alpha = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|}.$$

Nun können wir den Kosinus des Winkels durch diese Formel definieren.

**Beispiel 59.** *Berechnen Sie den Winkel zwischen den Vektoren* $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ *und* $\vec{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}$. ■

Bevor wir uns mit den Geradengleichungen beschäftigen, benötigen wir noch den Begriff des Normalvektors. Ist ein Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$ gegeben, dann nennen wir $\vec{n}$ einen Normalvektor von $\vec{v}$, wenn gilt $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$. D.h. der Normalvektor steht orthogonal auf den Vektor $\vec{v}$. Es gibt unendlich viele Normalvektoren, wenn wir die Länge und die Orientierung nicht fixieren. Ein Normalvektor kann sofort durch $\vec{n} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_v \\ -x_v \end{pmatrix}$ gefunden werden, denn es gilt

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = x_v \cdot x_n + y_v \cdot y_n = x_v \cdot y_v - y_v \cdot x_v = 0.$$

Die Parameterdarstellung einer Geraden $g$, welche durch die Punkte $P$ und $Q$ geht, ist gegeben durch

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P + t \cdot \vec{v}, \quad t \in \mathbb{R},$$

mit $\vec{v} = Q - P$.

Eine alternative Darstellung dieser Geraden erhalten wir wie folgt (siehe auch Abbildung 10): Für einen beliebigen Punkt $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in g$ gilt

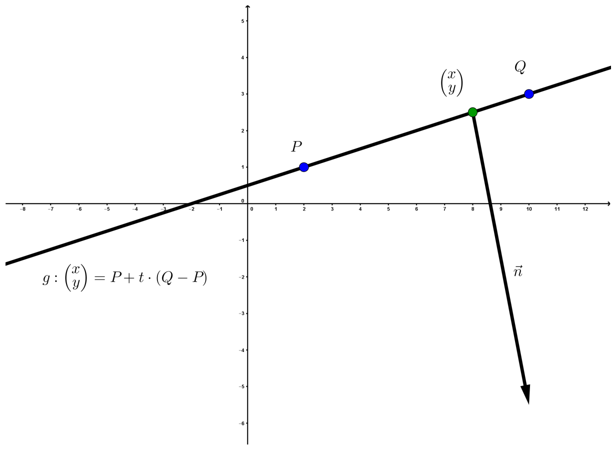


Abbildung 10: Allgemeine Geradengleichung.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - P = t \cdot \vec{v},$$

mit $t \in \mathbb{R}$. Für einen Normalvektor $\vec{n}$ von $\vec{v}$ gilt dann

$$\left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - P \right) \cdot \vec{n} = (t \cdot \vec{v}) \cdot \vec{n} = 0.$$

Setzen wir in die Definition des Skalarproduktes ein, dann erhalten wir die allgemeine Geradengleichung

$$(x - x_P) \cdot x_n + (y - y_P) \cdot y_n = 0,$$

bzw.

$$x \cdot x_n + y \cdot y_n = x_P \cdot x_n + y_P \cdot y_n.$$

Üblicherweise verwenden wir die Bezeichnungen $a := x_n$, $b := y_n$ und $c := x_P \cdot x_n + y_P \cdot y_n$ und erhalten

$$a \cdot x + b \cdot y = c.$$

Für den Fall, dass $b \neq 0$ gilt, können wir auf $y$ umformen und erhalten die uns bekannte Darstellung

$$y = -\frac{a}{b} \cdot x + \frac{c}{b}.$$

Definieren wir noch $k := -\frac{a}{b}$ und $d := \frac{c}{b}$, dann haben wir die Hauptform

$$y = k \cdot x + d$$

aus der Parameterdarstellung hergeleitet.

**Beispiel 60.** *Wie lautet die Parameterdarstellung der Geraden, welche durch die Punkte* $P = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ *sowie* $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *geht? Leiten Sie außerdem die allgemeine Geradengleichung sowie die Hauptform der Geraden her.* ■

Eine Gerade kann daher verschiedene Darstellungen haben:

a) Hauptform $y = kx + d$,

b) allgemeine Geradengleichung $ax + by = c$,

c) Parameterdarstellung.

Ist eine Gerade in der allgemeinen Geradengleichung $ax + by = c$ gegeben, dann können wir sofort den Normalvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ herauslesen.

Abschließend sollen noch die Polarkoordinaten in der Ebene eingeführt werden. Gegeben sei der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$. In Polarkoordinaten (Radius $r$ und Winkel $\alpha$) kann dieser

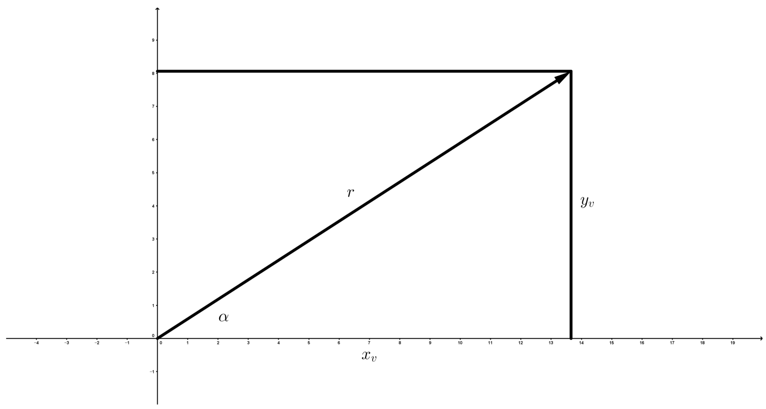


Abbildung 11: Polarkoordinaten.

dargestellt werden durch $r \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$. Dies gilt, da $\cos\alpha = \frac{x_v}{r}$ und $\sin\alpha = \frac{y_v}{r}$ gilt, siehe Abbildung 11. Daher folgt $r\cos\alpha = x_v$ und $r\sin\alpha = y_v$.

Die räumliche Koordinatengeometrie kann analog erarbeitet werden. Betrachten wir den Punkt $P$, sowie die Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$:

$$P = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \end{pmatrix}.$$

Gehen wir ausgehend vom Punkt $P$ in Richtung des Vektors $\vec{v}$, dann erhalten wir den Punkt $Q = P + \vec{v} = \begin{pmatrix} x_P + x_v \\ y_P + y_v \\ z_P + z_v \end{pmatrix}$. Die Länge ist definiert durch $|\vec{v}| := \sqrt{x_v^2 + y_v^2 + z_v^2}$ und die Addition, Subtraktion bzw. die Multiplikation mit einer reellen Zahl $c$ durch

$$\begin{aligned} \vec{v} + \vec{w} &= \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_v + x_w \\ y_v + y_w \\ z_v + z_w \end{pmatrix}, \\ \vec{v} - \vec{w} &= \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_v - x_w \\ y_v - y_w \\ z_v - z_w \end{pmatrix}, \\ c \cdot \vec{v} &= c \cdot \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} c \cdot x_v \\ c \cdot y_v \\ c \cdot z_v \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Der Einheitsvektor von $\vec{v}$ ist definiert durch $\vec{v}_0 := \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v}$ und das Skalarprodukt durch

$$\vec{v} \cdot \vec{w} := x_v \cdot x_w + y_v \cdot y_w + z_v \cdot z_w.$$

Ist das Skalarprodukt 0, dann stehen die beiden Vektoren orthogonal aufeinander.

Im Gegensatz zum zweidimensionalen Raum $\mathbb{R}^2$, wird im $\mathbb{R}^3$ nur die Parameterdarstellung verwendet, um eine Gerade durch den Raum zu beschreiben:

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P + t\vec{v}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dabei soll die Gerade wieder durch die Punkte $P$ und $Q$ gehen. Der Vektor $\vec{v}$ ist definiert durch $\vec{v} = Q - P$.

**Beispiel 61.** *Gegeben sind die Vektoren* $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *und* $\vec{w} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. *Berechnen Sie das Ergebnis der Addition, der Subtraktion und* $3 \cdot \vec{v}, |\vec{v}|, \vec{v}_0$ *sowie* $\vec{v} \cdot \vec{w}$. *Stehen die beiden Vektoren orthogonal aufeinander?* ■

**Beispiel 62.** *Gegeben seien die Punkte* $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *und* $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. *Wie lautet die Gerade, welche durch diese beiden Punkte geht?* ■

Bevor wir uns mit Ebenen im Raum beschäftigen, wollen wir Winkel im Raum einführen.

Im $\mathbb{R}^2$ haben wir die VW-Formel kennengelernt, um Winkel zwischen Vektoren zu definieren bzw. zu berechnen. Eine Dimension höher, also im $\mathbb{R}^3$, kann diese Formel unverändert angewandt werden. Wir definieren daher den Winkel zwischen zwei Vektoren $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ und $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ durch

$$\cos(\measuredangle(\vec{v};\vec{w})) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|}.$$

**Beispiel 63.** *Berechnen Sie den Winkel, der von den Geraden*

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad h\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$$

*eingeschlossen wird.* ■

Oftmals ist es praktisch, zu einem gegebenen Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix}$ einen Vektor $\vec{n}$ zu finden, sodass diese orthogonal aufeinander stehen, d.h. es soll $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ gelten. Wir können die Idee aus dem $\mathbb{R}^2$ übernehmen, indem wir einfach eine Komponente von $\vec{n}$ auf 0 setzen und bei den restlichen beiden Komponenten wie im $\mathbb{R}^2$ vorgehen. Wir erhalten dann z.B.

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ z_v \\ -y_v \end{pmatrix} \quad \textit{oder} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -z_v \\ y_v \end{pmatrix} \quad \textit{oder} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} z_v \\ 0 \\ -x_v \end{pmatrix} \quad \ldots$$

Haben wir jedoch zwei Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \end{pmatrix}$ gegeben und wollen wir einen Vektor $\vec{n}$ finden, sodass $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ sowie $\vec{w} \cdot \vec{n} = 0$ gilt, dann wird die Vorgehensweise etwas interessanter.

Wie auch im Falle von nur einem Vektor, ist die Aufgabe nicht eindeutig lösbar, d.h. es gibt viele Vektoren $\vec{n}$, welche orthogonal auf $\vec{v}$ und $\vec{w}$ stehen. Um die Aufgabe eindeutig lösbar zu machen, fordern wir noch zwei weitere Eigenschaften: $|\vec{n}|$ soll gleich dem Flächeninhalt des von den Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aufgespannten Parallelogramms sein, siehe Abbildung 12. Die Vektoren $\vec{v}$, $\vec{w}$ und $\vec{n}$ sollen in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem

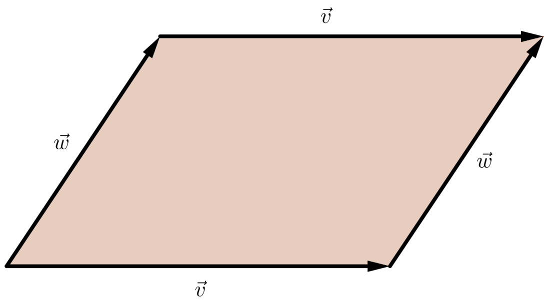


Abbildung 12: Fläche des Parallelogramms.

bilden (vorausgesetzt $\vec{v} \neq c \cdot \vec{w}$). Siehe dazu Abbildung 13.

Der einzige Vektor $\vec{n}$, der diese Eigenschaften erfüllt, hat die folgende Darstellung (die Herleitung finden Sie in den meisten Schulbüchern und kann mit dem bisher erlernten Wissen nachvollzogen werden):

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} y_v \cdot z_w - y_w \cdot z_v \\ -x_v \cdot z_w + x_w \cdot z_v \\ x_v \cdot y_w - x_w \cdot y_v \end{pmatrix}.$$

Wir benötigen diesen Normalvektor sehr häufig und definieren daher eine neue „Opera-

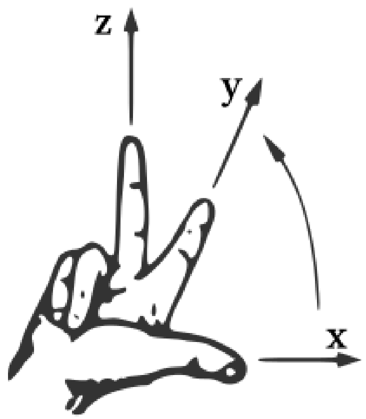


Abbildung 13: Rechtssystem, Rechte-Hand-Regel[4].

tion“ zwischen zwei dreidimensionalen Vektoren, das Kreuzprodukt:

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y_v \cdot z_w - y_w \cdot z_v \\ -x_v \cdot z_w + x_w \cdot z_v \\ x_v \cdot y_w - x_w \cdot y_v \end{pmatrix}.$$

Wir sehen, dass das Ergebnis dieses Kreuzproduktes wieder ein Vektor ist (im Gegensatz zum Skalarprodukt). Nennen wir diesen Vektor wieder $\vec{n}$, dann erfüllt dieser die drei bereits erwähnten Eigenschaften

a) $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ und $\vec{w} \cdot \vec{n} = 0$,

b) Der Betrag von $\vec{n}$, also $|\vec{n}|$, ist gleich der Fläche des von den Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aufgespannten Parallelogramms.

c) Die Vektoren $\vec{v}$, $\vec{w}$ und $\vec{n}$ bilden (in dieser Reihenfolge) ein Rechtssystem.

**Beispiel 64.** *Gegeben seien die Vektoren* $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ *und* $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. *Berechnen Sie das Kreuzprodukt* $\vec{v} \times \vec{w}$. *Weiters berechnen Sie das Kreuzprodukt* $\vec{w} \times \vec{v}$. ■

Im letzten Beispiel haben wir festgestellt, dass das Kreuzprodukt nicht kommutativ ist. Es gilt

$$\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}.$$

Wollen wir im $\mathbb{R}^3$ eine Ebene $\varepsilon$ beschreiben, so benötigen wir drei Punkte der Ebene $P, Q$ und $R$. Definieren wir die beiden Vektoren $\vec{v} = Q - P$ und $\vec{w} = R - P$, dann erhalten

[4]Grafik entnommen von `https://de.wikipedia.org/wiki/Rechtssystem\_(Mathematik)`

wir die Parameterdarstellung dieser Ebene durch

$$\varepsilon\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P + s\vec{v} + t\vec{w}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

**Beispiel 65.** *Gegeben sind die Punkte* $P = \begin{pmatrix} 14 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ *und* $R = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$. *Wie lautet die Parameterdarstellung der Ebene, welche alle drei Punkte enthält?* ■

Eine alternative Darstellung einer Ebenen erhalten wir wie folgt: Haben wir einen Normalvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ gegeben (z.B. $\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$), dann können wir die Parameterdarstellung mit diesem multiplizieren und erhalten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix},$$

da $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ und $\vec{w} \cdot \vec{n} = 0$ gilt, siehe Abbildung 14.

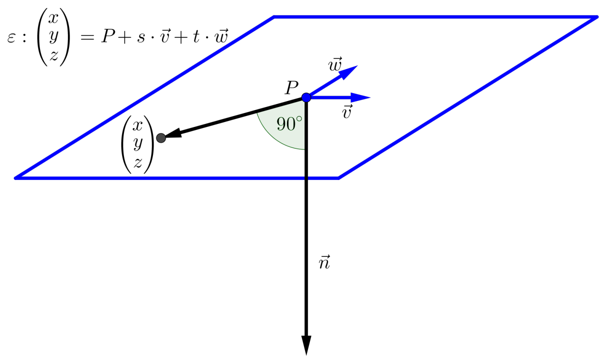


Abbildung 14: Ebene und zugehöriger Normalvektor.

Wir erhalten die Darstellung

$$\varepsilon\colon ax + by + cz = d,$$

mit $d := P \cdot \vec{n}$ und $a := x_n$, $b := y_n$ und $c := z_n$ und stellen fest: Die Koeffizienten $a; b$ und $c$ der allgemeinen Ebenengleichung bilden einen Normalvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ der Ebene. Die soeben hergeleitete Darstellung nennen wir die Normalvektorform oder Normalvektordarstellung einer Ebene.

**Beispiel 66.** *Bestimmen Sie die Normalvektordarstellung der Ebene aus Beispiel 65.* ■

**Beispiel 67.** *Gegeben sei die Ebene $g\colon z = -5x - 2y + 10$. Bestimmen Sie einen zugehörigen Normalvektor.* ■

# 13 Differenzialrechnung

Die Differenzialrechnung wurde von Leibniz[5] und Newton[6] parallel entdeckt.

Leibniz interessierte sich für das Tangentenproblem. Dabei handelt es sich um die Aufgabe, an eine Kurve in einem ihrer Punkte eine Gerade so zu legen, dass diese die gegebene Kurve in einer kleinen Umgebung dieses Punktes möglichst gut approximiert (siehe Abbildung 15).

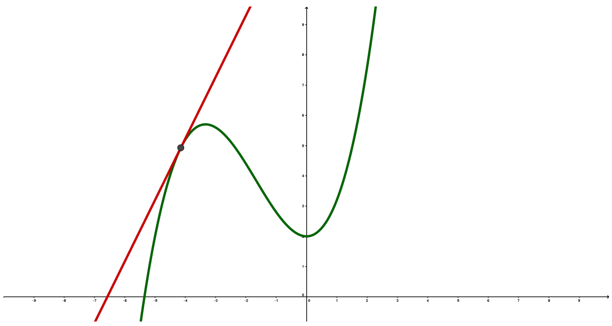

Abbildung 15: Tangente an eine Funktion.

Newton beschäftigte sich mit der Momentangeschwindigkeit. Dieses Problem führte wie auch das Tangentenproblem auf die Differenzialrechnung.

Ist eine Funktion $f(x)$ (bei uns immer von $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$) gegeben, so definieren wir die Ableitung $f'(x)$ (ebenfalls von $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$) durch den Differenzialquotienten

$$f'(x) := \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) := \lim_{x_1 \to x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}.$$

Diesen Vorgang nennen wir „Differenzieren“.

**Bemerkung.** *Nicht jede Funktion besitzt eine Ableitung. Zum Beispiel besitzt die Funktion $f(x) = |x|$ im Punkt $x = 0$ keine Ableitung. Betrachten wir nämlich den Grenzwert von links ($x_1 < 0$), dann erhalten wir*

$$\lim_{x_1 \to x; x_1 < 0} \frac{|x_1| - |0|}{x_1 - 0} = \lim_{x_1 \to x; x_1 < 0} \frac{-x_1 - 0}{x_1 - 0} = \lim_{x_1 \to x; x_1 < 0} \frac{-x_1}{x_1} = -1.$$

[5]Leibniz: 1646-1716

[6]Newton: 1643-1727

*Betrachten wir jedoch den Grenzwert von rechts ($x_1 > 0$), dann erhalten wir*

$$\lim_{x_1 \to x; x_1 > 0} \frac{|x_1| - |0|}{x_1 - 0} = \lim_{x_1 \to x; x_1 > 0} \frac{x_1 - 0}{x_1 - 0} = \lim_{x_1 \to x; x_1 > 0} \frac{x_1}{x_1} = 1.$$

*Der Wert der Ableitung ist im Punkt $x = 0$ nicht eindeutig und daher existiert die Ableitung in diesem Punkt nicht.*

Wir werden uns im weiteren jedoch nur mit Funktionen beschäftigen, welche differenzierbar sind, d.h. für welche die erste Ableitung existiert.

Differenziert man $f'(x)$, dann erhalten wir die zweite Ableitung, für welche wir folgende Schreibweisen verwenden wollen:

$$f''(x) = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} f(x).$$

Differenziert man die zweite Ableitung erhält man die dritte usw.

Für das Tangentenproblem von Leibniz erhalten wir folgende Lösung: Die Tangente der Form $y = kx + d$ einer Funktion $f$ im Punkt $x_0$ geht durch den Punkt $(x_0; f(x_0))$ und hat die Steigung $k = f'(x_0)$.

Einige Ableitungen können der nachstehenden Auflistung entnommen werden:

$$\begin{array}{lcl}
f(x) = c & \Rightarrow & f'(x) = 0, \\
f(x) = x^n & \Rightarrow & f'(x) = n \cdot x^{n-1}, \\
f(x) = e^x & \Rightarrow & f'(x) = e^x, \\
f(x) = \ln|x| & \Rightarrow & f'(x) = \dfrac{1}{x}, \quad \text{mit } x \neq 0, \\
f(x) = a^x & \Rightarrow & f'(x) = a^x \cdot \ln a, \quad \text{mit } a > 0, \\
f(x) = \sin x & \Rightarrow & f'(x) = \cos x, \\
f(x) = \cos x & \Rightarrow & f'(x) = -\sin x, \\
f(x) = \tan x & \Rightarrow & f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}, \\
f(x) = \arcsin x & \Rightarrow & f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \\
f(x) = \arccos x & \Rightarrow & f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \\
f(x) = \arctan x & \Rightarrow & f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}.
\end{array}$$

Weiters benötigen wir noch folgende Regeln:

$$
\begin{aligned}
(c \cdot f(x))' &= c \cdot f'(x), && \text{konstanter Faktor,}\\
(f(x) + g(x))' &= f'(x) + g'(x), && \text{Summenregel,}\\
(f(x) \cdot g(x))' &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x), && \text{Produktregel,}\\
\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}, && \text{Quotientenregel,}\\
f(g(x))' &= f'(g(x)) \cdot g'(x), && \text{Kettenregel.}
\end{aligned}
$$

**Beispiel 68.** *Bestimmen Sie die erste Ableitung der Funktion* $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 5$*, zeichnen Sie den Graphen von* $f(x)$ *und die zugehörige Tangente im Punkt* $(2; 5)$*.* ■

Auch das Problem der Momentangeschwindigkeit konnte mittels der Differenzialrechnung gelöst werden. Beschreibt $f(t)$ den Ort in Abhängigkeit der Zeit (eindimensionales Problem), dann ist die Durchschnittsgeschwindigkeit im Zeitintervall $[t; t_1]$ (für $t < t_1$) bzw. $[t_1; t]$ (für $t_1 < t$) gegeben durch den Differenzenquotienten

$$\frac{f(t_1) - f(t)}{t_1 - t}.$$

Macht man das Zeitintervall immer kleiner bzw. betrachtet man den Grenzprozess $t_1 \to t$, so erhält man $f'(t)$, also die erste Ableitung. Dies entspricht der Momentangeschwindigkeit. Analoges gilt für die Beziehung zwischen Momentangeschwindigkeit und Momentanbeschleunigung. Somit ist die Momentanbeschleunigung genau $f''(t)$, also die zweite Ableitung von der Ortsfunktion in Abhängigkeit von der Zeit.

**Beispiel 69.** *Bilden Sie die Ableitung von*

*a)* $f(x) = -5x^{1/2} - 3x^2 + 8x$,

*b)* $f(x) = (x - 2) \cdot (x + 3)$,

*c)* $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$,

*d)* $f(x) = \frac{5x^4 - 7x^3 + 10}{2x^3 - x}$,

*e)* $f(x) = \sqrt[3]{3x^2 + 8x}$,

*f)* $f(x) = 3x \cdot \ln|x|$,

*g)* $f(x) = e^{2x-1}$.

■

**Beispiel 70.** *Bilden Sie die Ableitung von*

*a)* $f(x) = 3\cos x - 2\sin x$,

*b)* $f(x) = \tan x \cdot \cos x$,

*c)* $f(x) = \cos(x^2)$.

■

**Beispiel 71.** *Berechnen Sie die dritte Ableitung von*

$$f(x) = 2\ln|x| + e^{-x}.$$

■

**Beispiel 72.** *Das Zeit-Weg-Gesetz für den freien Fall lautet* $s(t) = \frac{g}{2} \cdot t^2$, *wobei* $g$ *die Gravitationsbeschleunigung ist* ($g = 9{,}81\frac{m}{s^2}$). *Ein Körper fällt von einem* 100 *Meter hohen Turm frei nach unten. Wie viel Sekunden fällt er und mit welcher Geschwindigkeit (in Meter pro Sekunde) schlägt er auf?* ■

## 14 Kurvendiskussion und Extremwertaufgaben

Gegeben sei eine Funktion $f(x)$. Wir sind interessiert an

a) dem Definitionsbereich, den Polstellen

b) den Nullstellen,

c) dem Wert für $x = 0$,

d) den Extremwerten, d.h. Minima und Maxima,

e) den Wendepunkten,

f) dem Monotonie- und Krümmungsverhalten,

g) dem asymptotischen Verhalten.

Wie erhalten wir die Extremwerte? Wir haben bereits kennengelernt, wie wir die Tangente einer Funktion in einem Punkt $x$ berechnen können. Die Tangente im Punkt $x$ hat die Steigung $k = f'(x)$. D.h., hat die Tangente im Punkt $x$ eine Steigung ungleich

0, liegt mit Sicherheit kein Minimum bzw. Maximum vor. Wir interessieren uns daher für Punkte $x$, sodass $f'(x) = 0$ gilt. Diese Punkte sind mögliche Kandidaten für ein Extremum.

$f'(x) = 0$ ist nicht hinreichend für ein Extremum, sondern notwendig. Anders formuliert:

$$„\text{In } x \text{ liegt ein Extremum vor}“ \Rightarrow „f'(x) = 0“.$$
$$„f'(x) = 0“ \not\Rightarrow „\text{In } x \text{ liegt ein Extremum vor}“.$$

Das Zeichen $\not\Rightarrow$ bedeutet „daraus folgt nicht“.

**Beispiel 73.** *Erläutern Sie dies anhand der Funktion $f(x) = x^3$.* ■

**Beispiel 74.** *Betrachten Sie Abbildung 16 und erörtern Sie den Sachverhalt.* ■

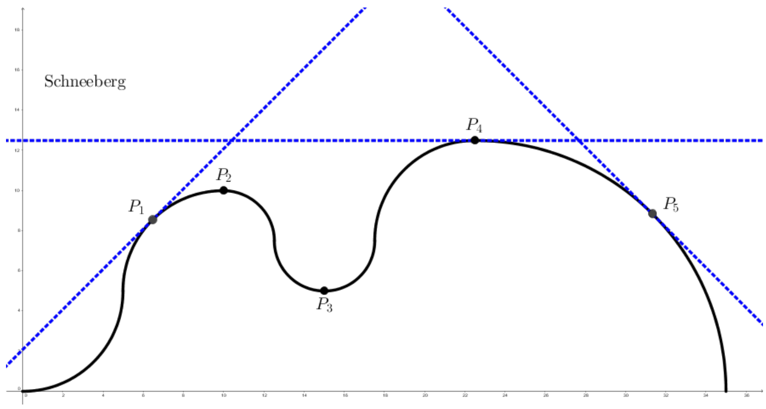


Abbildung 16: Schneeberg.

Es gilt:

a) Gilt $f'(x) = 0$ und $f''(x) < 0$, dann liegt in $x$ ein Maximum.

b) Gilt $f'(x) = 0$ und $f''(x) > 0$, dann liegt in $x$ ein Minimum.

c) Gilt $f'(x) = 0$ und $f''(x) = 0$, dann kann keine Aussage über Extrema getroffen werden. Um eine Aussage zu erhalten, können höhere Ableitungen herangezogen werden.

**Beispiel 75.** *Bestimmen Sie die Extrema der Funktion $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x$ und zeichnen Sie den Graphen.* ■

Punkte an denen sich das Krümmungsverhalten einer Funktion ändert nennen wir Wendepunkte. Ein Wendepunkt liegt z.B. vor, wenn $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$ gilt. Gilt $f''(x) = 0$ und $f'''(x) = 0$, kann keine Aussage über Wendepunkte getroffen werden. Wie bereits bei den Extremstellen, können höhere Ableitungen herangezogen werden, um dennoch eine Aussage über Wendepunkte zu erhalten.

**Beispiel 76.** *Führen Sie eine Kurvendiskussion an der Funktion $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x$ durch.* ■

**Beispiel 77.** *Führen Sie eine Kurvendiskussion an der Funktion $f(x) = x^3$ durch.* ■

**Beispiel 78.** *Führen Sie eine Kurvendiskussion an der rationalen Funktion $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ durch.* ■

**Beispiel 79.** *Wie soll eine Dose mit einem Liter Inhalt dimensioniert werden, damit möglichst wenig Blech gebraucht wird?* ■

**Beispiel 80.** *Ein Körper wird mit der Geschwindigkeit vom Betrag $v_0$ lotrecht in die Höhe geworfen. Nach der Zeit $t$ ist die erreichte Wurfhöhe durch die Gleichung*

$$h(t) = v_0 t - \frac{g}{2} t^2$$

*gegeben. Berechnen Sie die größte Wurfhöhe, die der Körper erreicht.* ■

**Beispiel 81.** *Eine Spule von kreisförmigem Querschnitt soll durch einen kreuzförmigen Eisenkern möglichst weitgehend ausgefüllt werden, siehe Abbildung 17. Berechnen Sie die Abmessungen, bei gegebenem Durchmesser $d$.* ■

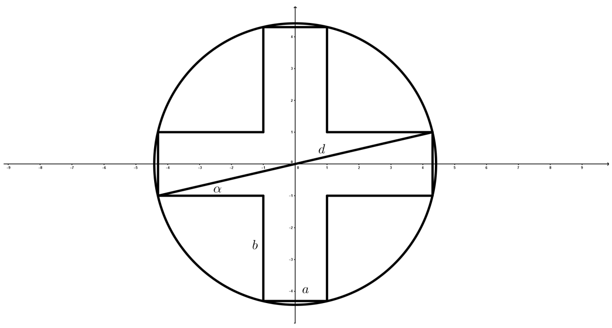


Abbildung 17: Querschnitt einer Spule mit Eisenkern.

# 15 Integralrechnung

Integrieren ist das Gegenstück zum Differenzieren. D.h., haben wir eine Funktion $f(x)$ gegeben mit $f'(x) = g(x)$, dann ist das Integral von $g(x)$ gegeben durch $f(x) + c$. Die

Konstante benötigen wir deswegen, weil sie beim Differenzieren wegfällt. Wir schreiben

$$\int g(x)\,\mathrm{d}x = f(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

$g(x)$ wird Integrand und $f(x)$ wird Stammfunktion genannt. Stammfunktionen:

$$\begin{aligned}
\int 0\,\mathrm{d}x &= c, && \text{da } c' = 0,\\
\int x^n\,\mathrm{d}x &= \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, && \text{da } \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + c\right)' = \frac{(n+1)x^n}{n+1} = x^n,\\
\int e^x\,\mathrm{d}x &= e^x + c, && \text{da } (e^x + c)' = e^x,\\
\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x &= \ln|x| + c, && \text{da } (\ln|x| + c)' = \frac{1}{x},\\
\int a^x\,\mathrm{d}x &= \frac{a^x}{\ln a}, && \text{da } \left(\frac{a^x}{\ln a}\right)' = \frac{a^x \ln a}{\ln a} = a^x,\\
\int \sin x\,\mathrm{d}x &= -\cos x, && \text{da } (-\cos x)' = \sin x,\\
\int \cos x\,\mathrm{d}x &= \sin x, && \text{da } \sin x' = \cos x,\\
\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \arctan x, && \text{da } \arctan x' = \frac{1}{1+x^2},
\end{aligned}$$

Rechenregeln:

$$\begin{aligned}
\int cf(x)\,\mathrm{d}x &= c\int f(x)\,\mathrm{d}x, && \text{konstanter Faktor},\\
\int f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x &= \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x, && \text{Summenregel},\\
\int g'(x)\cdot f(g(x))\,\mathrm{d}x &= \int f(y)\,\mathrm{d}y, && \text{Substitutionsregel},\\
\int f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x &= f(x)\cdot g(x) - \int f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x, && \text{partielle Integration.}
\end{aligned}$$

Betrachten wir die Substitutionsregel genauer: wir definieren die neue Variable $y := g(x)$ und erhalten daher $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g'(x)$. Formal können wir wie folgt umformen:

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y}{g'(x)}.$$

Setzen wir die Substitution und die soeben festgestellte Beziehung in das Integral ein, erhalten wir genau die Substitutionsregel:

$$\int g'(x)\cdot f(g(x))\,\mathrm{d}x = \int g'(x)\cdot f(y)\cdot\frac{\mathrm{d}y}{g'(x)} = \int f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Die Formel der partiellen Integration erhalten wir sofort durch die Beziehung

$$f(x) \cdot g(x) = \int (f(x) \cdot g(x))' \, \mathrm{d}x = \int f'(x) \cdot g(x) \, \mathrm{d}x + \int f(x) \cdot g'(x) \, \mathrm{d}x.$$

**Beispiel 82.** *Integrieren Sie*

*a)* $x^5 + 3x^2 - 5$,

*b)* $e^x + \frac{1}{x}$,

*c)* $\sin x + \cos x$,

*d)* $\frac{7}{1+x^2}$.

■

**Beispiel 83.** *Verwenden Sie die Substitutionsregel, um die Funktionen*

*a)* $(3x+5)^{17}$,

*b)* $\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}$,

*c)* $\frac{5}{x-2}$,

*d)* $e^{ax}$, *mit* $a \in \mathbb{R}$

*zu integrieren.* ■

**Beispiel 84.** *Verwenden Sie die partielle Integration, um die Funktionen*

*a)* $x^n \cdot \ln x$, *mit* $n \neq -1$,

*b)* $x \cdot e^{ax}$, *mit* $a \in \mathbb{R}$,

*c)* $\ln x$ *(Hinweis: integrieren Sie* $1 \cdot \ln x$*)*

*zu integrieren.* ■

Es gibt noch viele Tricks, um Integrale zu bezwingen. Eine weitere Methode, die sogenannte Partialbruchzerlegung, wird anhand von zwei Beispielen erörtert.

**Beispiel 85.** *Integrieren Sie die Funktion*

*a)* $\frac{x+5}{x^2+x}$,

*b)* $\frac{x+2}{x^2-8x+15}$.

■

**Bemerkung.** *Eine komplizierte Funktion zu differenzieren mag zwar mühsam sein, jedoch kommen wir mit unserem erlernten Wissen sehr weit. Beim Integrieren ist es leider nicht ganz so einfach. Probieren Sie selbst aus: Denken Sie sich irgendeine Funktion aus und differenzieren Sie diese. Vergleichen Sie mit einem Computer-Algebra-System. Nun probieren Sie, die Funktion zu integrieren…*

Um eine Fläche zwischen der $x$-Achse und einer gegebenen Kurve $f(x)$ berechnen zu können, verwenden wir das bestimmte Integral. Dabei integrieren wir $f(x)$ wie gewohnt (auf die Integrationskonstante $c$ kann verzichtet werden). Sei $F(x)$ die Stammfunktion und wollen wir die Fläche zwischen den $x$-Werten $x_1$ und $x_2$ berechnen wollen, dann gilt für die Fläche $A$:

$$A = F(x_2) - F(x_1).$$

Dies ist ein Teil des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung bzw. des Fundamentalsatzes der Analysis. Wir schreiben meist

$$A = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

**Beispiel 86.** *Berechnen Sie die Fläche der Funktion* $f(x) = x^2$ *im Intervall* $[-1; 1]$. ■

**Beispiel 87.** *Berechnen Sie die Fläche der Funktion* $f(x) = x^3 + 8$ *im Intervall* $[-2; 2]$ *durch Integration. Können Sie diese Fläche auch einfacher berechnen?* ■

**Beispiel 88.** *Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks, das von den Parabeln* $y^2 = 2x$ *und* $x^2 = 2y$ *begrenzt wird, siehe Abbildung 18.* ■

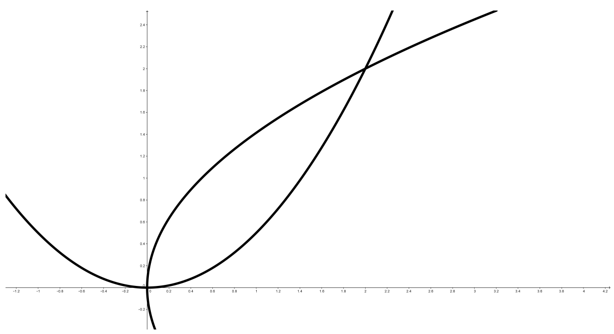

Abbildung 18: Zu berechnende Fläche.

**Beispiel 89.** *Berechnen Sie die Fläche des Kreises mit Radius* $r$. ■

**Beispiel 90.** *Berechnen Sie das bestimmte Integral:*

*a)* $\int_0^1 x^2 \cdot e^{-x^3} \, \mathrm{d}x$,

*b)* $\int_1^2 \ln |x| \, \mathrm{d}x$,

*c)* $\int_6^7 \frac{x+2}{x^2-8x+15} \, \mathrm{d}x$.

■

Das Volumen eines Drehkörpers, welches durch Rotation des Kurvenstückes $f(x)$, $a \leq x \leq b$ um die $x$-Achse entsteht, berechnet man durch

$$V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x) \, \mathrm{d}x.$$

**Beispiel 91.** *Gegeben sei die Funktion* $f(x) = \sqrt{2x}$ *mit* $0 \leq x \leq 5$. *Berechnen Sie das Volumen des Drehkörpers um die* $x$*-Achse.* ■

# Literatur


[1] Reichel, Müller, and Hanisch. *Lehrbuch der Mathematik 8.* Hölder-Pichler-Tempsky, 1993.

[2] Reichel, Müller, Hanisch, and Laub. *Lehrbuch der Mathematik 7.* Hölder-Pichler-Tempsky, 1993.

[3] Reichel, Müller, Laub, and Hanisch. *Lehrbuch der Mathematik 6.* Hölder-Pichler-Tempsky, 1992.

[4] Reichel, Müller, Laub, Hanisch, and Körperth. *Lehrbuch der Mathematik 5.* Hölder-Pichler-Tempsky, 1990.