

Übungsblatt 12: Potenzen und Wurzeln

Regeln der Potenzrechnung $a, b, p, q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, n, m \in \mathbb{Z}$

Multiplikation mit Skalar	$b \cdot a^n = b \cdot (a^n)$
Addieren gleicher Potenzen	$p \cdot a^n + q \cdot a^n = (p + q) \cdot a^n$
Multiplikation von Potenzen	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
Division von Potenzen	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
Multiplikation mit gleichen Exponenten	$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$
Division mit gleichen Exponenten	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
Potenzieren einer Potenz	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Definitionen

$$a^1 = a$$

$$a^0 = 1$$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-mal}}$$

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

$$a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a}$$

Musterbeispiel

$$\left(\frac{x^2}{x^4 y^{-4}}\right)^3 \cdot \left(\frac{x^4 y^{-2}}{y^3 x^{-2}}\right)^2$$

1. Umwandeln der Potenzen mit negativen Exponenten in Potenzen mit positiven Exponenten

$$\left(\frac{x^2 y^4}{x^4}\right)^3 \cdot \left(\frac{x^4 x^2}{y^3 y^2}\right)^2$$

2. Multiplikation bzw. Division von Potenzen mit der denselben Basis

$$\left(\frac{y^4}{x^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{x^6}{y^5}\right)^2$$

3. Potenzieren der Klammern

$$\frac{y^{12}}{x^6} \cdot \frac{x^{12}}{y^{10}}$$

4. Division der Potenzen („Kürzen“)

$$y^2 \cdot x^6$$



Aufgabe 1

Bringen Sie auf möglichst einfache Form:

- | | | |
|-------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------------------|
| a) $3a^3 \cdot 4a^5 + 2a^6 \cdot 6a^2 =$ | b) $(a^2 - b^2) \cdot (3a^3 - 5b) =$ | c) $2x^2 y^3 \cdot (4xy^5 - 2yx^5 + 3x^2 y^2) =$ |
| d) $(-a)^{2n+3} \cdot a^{n+1} =$ | e) $(-x^{2n})^{2n+1} =$ | f) $(-a^n)^4 \cdot (-a)^{4n} =$ |
| g) $[(b^3 c^2 d^5) \cdot ab^2 c^5] \cdot [(a^3 c d^2) \cdot c^7 d^3] =$ | | h) $(-a)^{2n} \cdot (-a^{2+2}) =$ |

Achtung: $(-a)$ ist weder positiv noch negativ, erst durch Einsetzen entsteht eine positive oder negative Zahl!

Aufgabe 2

Stellen Sie mit positivem Exponenten dar:

a) $-a^{-2} =$ b) $(-a)^{-2} =$ c) $((-a)^{-2})^{-3} =$

 d) $\left(\frac{5a^3b^{-2}}{6x^{-1}y^4}\right)^3 \div \left(\frac{12a^4x^{-3}}{10b^2y^{-2}}\right)^4 =$ e) $\frac{a^{-4}b^5}{x^{-3}y^2} \cdot \frac{x^{-2}y^1}{a^3b^6}$ f) $\left(\frac{(-a)^3}{(-b)^2}\right)^5 \cdot \left(\frac{(b)^{-3}}{a^{-2}}\right)^2$

Aufgabe 3

 Vereinfachen Sie so weit als möglich:

a) $\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{x} =$ b) $\sqrt[4]{27a^2b} \cdot \sqrt[4]{3a^2b^3} =$ c) $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{k}} =$ d) $a^{1/n} \cdot a^{1/k} =$

Aufgabe 4

 Ziehen Sie entweder teilweise die Wurzel oder bringen Sie einen Faktor unter die Wurzel:

a) $\sqrt{36a^4b^3} =$ b) $\sqrt[4]{x^6 \cdot 625 \cdot y^5} =$ c) $12 \cdot \sqrt{x} =$ d) $3 \cdot \sqrt[3]{x^2 \cdot a} =$
e) $\frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5}} =$ f) $\frac{x}{\sqrt[3]{x}} =$ g) $\frac{x}{\sqrt[2]{x}} =$ h) $\frac{\sqrt[4]{7^3}}{\sqrt[4]{7}} =$

Lösungen

Aufgabe 1

- a) $24a^8$ b) $3a^5 - 3a^3b^2 - 5a^2b + 5b^3$ c) $8x^3y^8 - 4x^7y^4 + 6x^4y^5$ d) $-a^{3n+4}$
e) $-x^{2n(2n+1)}$ f) a^{8n} g) $a^4b^5c^{15}d^{10}$ h) $-a^{2n+4}$

Aufgabe 2

- a) $-1/a^2$ b) $1/a^2$ c) a^6 d) $5^7b^2x^{15}/6^7a^7y^{20}$ e) x/ya^7b f) $-a^{19}/b^{16}$

Aufgabe 3

- a) x b) $3ab$ c) $a^{\frac{1}{nk}}$ d) $a^{\frac{n+k}{nk}}$

Aufgabe 4

- a) $6a^2b\sqrt{b}$ b) $5xy^4\sqrt{x^2y}$ c) $\sqrt{144x}$ d) $\sqrt[3]{27x^2a}$ e) $\sqrt[3]{5}$
f) $x^{\frac{n-1}{n}}$ g) $x^{\frac{6}{7}}$ h) $\sqrt{7}$