

Übungsblatt 17: Integralrechnung

Unbestimmtes Integral:

Integrieren ist das Gegenstück zum Differenzieren. D.h., haben wir eine Funktion $f(x)$ gegeben mit $f'(x) = g(x)$, dann ist das Integral von $g(x)$ gegeben durch $f(x) + c$. Die Konstante können wir hinzufügen, weil sie beim Differenzieren wegfällt. Wir schreiben

$$\int g(x) dx = f(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

$g(x)$ wird Integrand und $f(x)$ wird Stammfunktion genannt. Es gilt:

$$\begin{aligned} \int 0 dx &= c, & \text{da } 0' &= 0, \\ \int x^n dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, & \text{da } \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + c\right)' &= \frac{(n+1)x^n}{n+1} = x^n, \\ \int e^x dx &= e^x + c, & \text{da } (e^x + c)' &= e^x, \end{aligned}$$

Es gelten zum Beispiel folgende Rechenregeln:

$$\begin{aligned} \int cf(x) dx &= c \int f(x) dx, \\ \int f(x) + g(x) dx &= \int f(x) dx + \int g(x) dx, \end{aligned}$$

Musterbeispiel

Integrieren Sie die Funktion $f(x) = x^5 + 3x^2$.

Lösung

$$\int x^5 + 3x^2 dx = \frac{x^6}{6} + 3 \frac{x^3}{3} + c = \frac{x^6}{6} + x^3 + c.$$

Aufgabe 1

Integrieren Sie die Funktion $f(x) = 2x + 7x^3 - 2x^4$.

Aufgabe 2

Integrieren Sie die Funktion $f(x) = e^x - 2x^2$.

Bestimmtes Integral:

Um eine Fläche zwischen der x -Achse und einer gegebenen positiven Kurve $f(x)$ berechnen zu können, verwenden wir das bestimmte Integral. Dabei integrieren wir $f(x)$ wie gewohnt (auf die Integrationskonstante c kann verzichtet werden). Sei $F(x)$ die Stammfunktion und wollen wir die Fläche zwischen den x -Werten x_1 und x_2 berechnen, dann gilt für die Fläche A :

$$A = F(x_2) - F(x_1).$$

Wir schreiben

$$A = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = F(x) \Big|_{x_1}^{x_2} = F(x_2) - F(x_1).$$

Musterbeispiel

Berechnen Sie die Fläche der Funktion $f(x) = x^2$ im Intervall $[-1; 1]$.

Lösung

$$A = \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{2}{3}$$



Aufgabe 3

Berechnen Sie die Fläche der Funktion $f(x) = x^3 + 8$ im Intervall $[-2; 2]$ durch Integration. Können Sie diese Fläche auch einfacher berechnen?

Lösungen

Aufgabe 1

$$\int 2x + 7x^3 - 2x^4 dx = x^2 + \frac{7x^4}{4} - \frac{2x^5}{5} + c$$

Aufgabe 2

$$\int e^x - 2x^2 dx = e^x - \frac{2x^3}{3} + c$$

Aufgabe 3

$$A = \int_{-2}^2 x^3 + 8 dx = \frac{x^4}{4} + 8x \Big|_{-2}^2 = (4 + 16) - (4 - 16) = 32$$