Übungsblatt 16: Differentialrechnung II

Analyse von Funktionen

1. Definitionsbereich
2. Nullstellen: Lösungen der Gleichung $f(x) = 0$
3. Stetigkeit: Auffinden der Sprungstellen, Knicke etc.
4. (relative) Extremwerte: Lösungen der Gleichung $f'(x) = 0$ und Überprüfung
5. Wendepunkte: Lösungen der Gleichung $f''(x) = 0$ und Überprüfung
6. Monotonie- und Krümmungsverhalten: Überprüfung der 1. bzw. 2. Ableitung

$f'(x) > 0$ (< 0) $\Rightarrow$ f ist streng monoton wachsend (fallend)

$f''(x) > 0$ (< 0) $\Rightarrow$ f' ist streng monoton wachsend (fallend) $\Leftrightarrow$ f ist konvex (konkav)

7. Graph der Funktion (& Verhalten am Rand!)

<u>Musterbeispiel</u>

Analysieren Sie die Funktion $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x$

<u>Lösung</u>

1. Definitionsbereich: D = R
2. Nullstellen bestimmen

$f(x) = 0 \Rightarrow x^3 + 2x^2 - 4x = 0$

$\Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = -1+\sqrt{5},\ x_3 = -1-\sqrt{5},$

3. Stetigkeit

$f(x)$ ist stetig auf $\mathbb{R}$ (keine Brüche, etc.)

4. relative Extremwerte

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 4x - 4 = 0$
$\Rightarrow x_{E_1} = -2;\ x_{E_2} = 2/3$

Funktionswerte:
$f(-2) = (-2)^3 + 2\cdot(-2)^2 - 4(-2) = 8;$
$f(2/3) = -40/27$

$f''(-2) = 6\cdot(-2) + 4 = -8 < 0$
$\Rightarrow$ Maximum: $(-2|8)$

$f''(2/3) = 8 > 0$
$\Rightarrow$ Minimum: $(2/3|-40/27)$

5. Wendepunkt

$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x + 4 = 0 \Rightarrow x_W = -2/3$
$f(-2/3) = 88/27$

$f''(x) = 6 > 0$

6. Monotonie- und Krümmungsverhalten:

Intervalle für Monotonieverhalten ergeben sich aufgrund der Extremwerte

$(-\infty; -2)$ wachsend
(Kontrolle durch Einsetzen eines Wertes aus dem Intervall: z.B. $f'(-3) = 11 > 0$))

$(-2; 1)$ fallend (z.B. $f'(0) = -3 < 0$))

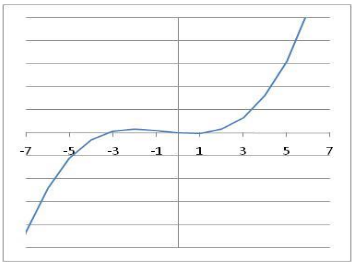
$(1; \infty)$ wachsend (z.B. $f'(2) = 16 > 0$))

Intervalle für Krümmungsverhalten werden durch Wendepunkte bestimmt

$(-\infty; -2/3)$ konkav ($f''(x) < 0$))

$(-2/3; \infty)$ konvex ($f''(x) > 0$));

7. Graph



Aufgabe 1

Bestimmen Sie von der Polynomfunktion 3. Grades mit der Funktionsgleichung $f(x) = x^3 - 21x + 20$ die Nullstellen ($x_N = 1$), die stationären Punkte und deren Art, den Wendepunkt mit Tangente, das Monotonieverhalten und Krümmungsverhalten.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie von der Polynomfunktion mit der Funktionsgleichung $f(x) = -\frac{x^3}{4}+\frac{3x^2}{2}+\frac{15x}{4}-5$ die lokalen Extremstellen und deren Art, den Wendepunkt mit Tangente, sowie das Monotonieverhalten und das Krümmungsverhalten.
Hinweis: x = 1 ist eine Nullstelle. Skizzieren Sie den Graphen im Intervall [-1;7] (Einheit auf der x-Achse 1cm, auf der y-Achse 0,5 cm).

Aufgabe 3

Gegeben ist die Gesamtkostenfunktion mit der Gleichung $K(x) = x^3 - 6x^2 + 15x + 32$.
Man bestimme die ersten drei Ableitungsfunktionen, die Stückkostenfunktion und deren Ableitung. Man berechne das Minimum der Stückkosten.

Aufgabe 4

Gegeben ist die fixe Stückkostenfunktion mit der Gleichung $k_f(x) = 300/x$ und der ökonomischen Definitionsmenge $D = \mathbb{R}^+$.
Wie verhalten sich die fixen Stückkosten, wenn man die Produktionsmenge x sukzessiv erhöht (x strebe somit gegen Unendlich)?

Aufgabe 5

Ein Monopolist orientiert sich im Rahmen seiner Preispolitik an der Preisabsatzfunktion mit der folgenden Gleichung $p(x) = -7x + 49$.
Man bestimme die Grenzerlösfunktion.

Aufgabe 6

Gegeben ist die Kostenfunktion mit der Gleichung $K(x) = x^3 - 8x^2 + 24x + 30$.
Bei welcher Produktionsmenge ist der Kostenzuwachs am geringsten?

Aufgabe 7

Ein Körperwird mit der Geschwindigkeit vom Betrag v_0 lotrecht in die Höhe geworfen. Nach der Zeit t ist die erreichte Wurfhöhe durch die Gleichung $h = v_0 \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$ gegeben. Berechne die größte Wurfhöhe, die der Körper erreicht.

Aufgabe 8

In einem Unternehmen wird ein Artikel A hergestellt. Hinsichtlich der Preisgestaltung gilt die Preisabsatzfunktion p mit der Gleichung $p(x) = -3x + 39$ als Orientierungshilfe. Bezüglich der Produktion des Artikels A gilt die Gesamtkostenfunktion $K(x) = x^3 - 6x^2 + 15x + 32$.
Bei welcher Absatzmenge und zu welchem Preis lässt sich das Ziel der Gewinnmaximierung realisieren?

Aufgabe 9

Der Graph der Funktion $f(x) = -\frac{x^3}{6} + bx^2 + cx + d$ hat an der Stelle $x_w = 2$ einen Wendepunkt. Im Wendepunkt hat der Graph die Steigung $k_w = \frac{3}{2}$. Der Wendepunkt selbst ist auch eine Nullstelle.
Geben Sie die Funktionsgleichung von f an.

Aufgabe 10

Eine Polynomfunktion 3. Grades hat in W(2/y) einen Wendepunkt mit der Wendetangente t: 3x + y = 6. Ihr Graph enthält den Punkt P(0/-2).

Aufgabe 11

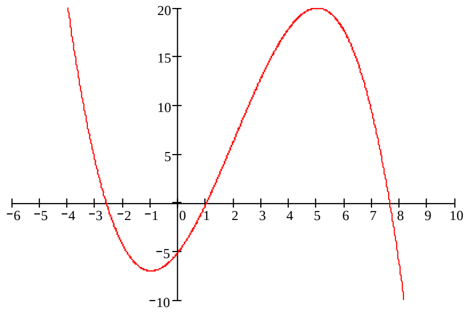
Eine Gesamtkostenfunktion KGes hat die Form einer Polynomfunktion dritten Grades und genügt den folgenden Bedingungen:
Bei 5 ME entstehen Gesamtkosten von 82 GE,
Bei 5 ME betragen die Grenzkosten 30 GE,
Bei 5 ME ist die Steigung der Grenzkosten 18,
Bei 5 ME ist die Steigung von K’’ gleich 6.
Man bestimme die Gesamtkostenfunktion KGes.

Lösungen

Aufgabe 1

Nullstellen: bei x = -5, 1, 4; Extrema: $(\sqrt{7}|-17{,}04)$ Min, $(-\sqrt{7}|57{,}04)$ Max; Wendepunkt: (0|20) t_w: $y_w = -21\cdot x + 20$; Monotonie: $x < -\sqrt{7} \Rightarrow$ f(x) steigend; $-\sqrt{7} < x < \sqrt{7} \Rightarrow$ f(x) fallend; $x > \sqrt{7} \Rightarrow$ f(x) steigend; Krümmung: $x < 0 \Rightarrow$ f(x) konkav; $x > 0 \Rightarrow$ f(x) konvex

Aufgabe 2



Nullstellen: bei x = 1, $\frac{1}{2}\cdot(5\pm\sqrt{10})$ Extrema: (-1|-7) Min, (5|20) Max; Wendepunkt: (2|13/2) t_w: $y_w = {}^{27}/_{4}\cdot x - 7$; Monotonie: $x< -1 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow$ f(x) fallend; $-1 < x < 5 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow$ f(x) steigend; $x > 5 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow$ f(x) fallend; Krümmung: $x < 2 \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow$ f(x) konvex (= positiv gekrümmt); $x > 2 \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow$ f(x) konkav (= negativ gekrümmt)

Aufgabe 3

$K'(x) = 3x^2 - 12x + 15$; $K''(x) = 6x - 12$; $K'''(x) = 6$;
$k(x) = x^2 + 32/x - 6x + 15$; $k'(x) = 2x - 32/x^2 - 6$

$k'(x)=0 \Rightarrow 2x - 32/x^2 = 6 \Rightarrow 2x^3 - 6x^2 - 32 = 0 \Rightarrow x^3 - 3x^2 - 16 = 0$
$T_{16}=\{\pm2, \pm4, \pm8, \pm16\}$ => x = 4 ist eine Lösung.
$(x^3 - 3x^2 - 16) : (x-4) = x^2 + x + 4$ => keine weiteren Lösungen
$k''(x) = 2 + 64/x^3 \Rightarrow k''(4) = 2 + 64/64 = 2 > 0$ => Minimum.

Aufgabe 4

Sie streben gegen 0, man schreibt $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{300}{x} = 0$

Aufgabe 5

$E(x) = -7\cdot x^2 + 49\cdot x$; $E'(x) = -14\cdot x + 49$

Aufgabe 6

$K'(x) = 3x^2 - 16x + 24$ und $K''(x) = 6x - 16$, daher gilt für ein Minimum: $6x - 16 = 0$, somit ist $x = \frac{8}{3} \approx 3$ das gesuchte Minimum. Es handelt sich tatsächlich um ein Minimum, da $K'''\left(\frac{8}{3}\right) = 6 > 0$ gilt.

Aufgabe 7

$$h(t) = v_0 \cdot t - \frac{g}{2}\cdot t^2 \qquad h'(t) = v_0 - g\cdot t = 0 \qquad t = \frac{v_0}{g}$$

$$h\left(\frac{v_0}{g}\right) = v_0 \cdot \frac{v_0}{g} - \frac{g}{2}\cdot\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 = \frac{2v_0^{\,2}}{2g} - \frac{v_0^{\,2}g}{2g} = \frac{v_0^{\,2}}{2g}(2-g) = v_0^{\,2}\left(\frac{1}{g} - \frac{1}{2}\right)$$

Aufgabe 8

$G(x) = -x^3 + 3x^2 + 24x - 32$; $G'(x) = -3x^2 + 6x + 24$; x = 4 ; G(4) = 48 ; p(4) = 27

Aufgabe 9

$f(x) = -\frac{x^3}{6} - x^2 - \frac{x}{2} + \frac{5}{3}$

Aufgabe 10

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$

Aufgabe 11

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 15x + 32$