Übungsblatt 10: Polynome

$P_n(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + \ldots + a_n \cdot x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k$ mit $D = \mathbb{R}$; $n \in \mathbb{N}$; $a_k \in \mathbb{R}$; $a_n \neq 0$

x_N ist Nullstelle $\Leftrightarrow$ $P_n(x_N) = 0$

quadratische Funktion $f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ mit $a_2 \neq 0$

Darstellung als Parabel $y = q \cdot (x - x_s)^2 + y_s$
Scheitelpunktkoordinaten $S(x_s;\ y_s)$

Diskriminante $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$ (oder $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$)

$\Delta < 0 \Rightarrow$ keine Lösung
$\Delta = 0 \Rightarrow$ genau eine Lösung
$\Delta > 0 \Rightarrow$ genau zwei Lösungen (Lösungsformel)

Musterbeispiel

Berechnen Sie den Scheitel und die Nullstellen des Polynoms

$f(x) = 2x^2 + 5x - 12$

Berechnung des Scheitels mithilfe der quadratischen Ergänzung (Darstellung als Parabel)

1. Koeffizienten a_2 herausheben
   $y = 2 \cdot (x^2 + 5/2\ x - 6)$
2. Bestimmung von x_s und y_s
   $5/2 = 2 \cdot x_s \Rightarrow x_s = 5/4$
   $2 \cdot (x - 5/4)^2 = 2 \cdot (x^2 - 2 \cdot 5/4\ x + 25/16) \Rightarrow 2 \cdot 25/16 + y_s = -12 \Rightarrow y_s = -73/4$
   $y = 2 \cdot (x - 5/4)^2 - 73/4$

Berechnung der Nullstellen:

1. Gesucht ist jenes x, für das gilt, dass $f(x) = 0$
   $0 = 2x^2 + 5x - 12$
2. Lösen der quadratischen Gleichung
   $x_1 = -4$; $x_2 = 3/2$

Aufgabe 1

Welche der folgenden Funktionen sind Polynome?

a) $f(x) = x^3 + 3^x$ b) $f(x) = -17x^{100} + 1$ c) $f(x) = x^2 + x^{-2}$ d) $f(x) = (x + 1)^3$
e) $f(x) = 2x^3 - 4x^{4/3} + 1$ f) $f(x) = 0{,}5 \cdot x^3 + 1{,}7 \cdot x^2 + 3{,}45 \cdot x + 1{,}33$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Koeffizienten a_i und den Grad der folgenden Polynome:

a) $f(x) = 2x^2 - x + 1$ b) $f(x) = -x + 4$ c) $f(x) = 0{,}1 \cdot x^5 + 3{,}2 \cdot x^4 + 3 \cdot x$ d) $f(x) = x^7$
e) $f(x) = -\sqrt{3}\, x^7 + \pi \cdot x^6 - b \cdot x^2 + a \cdot x + c$ f) $f(x) = x^2 + 5{,}8 \cdot x^3 - 0{,}5 + 2{,}3 \cdot x$

Aufgabe 3

Erstellen Sie eine Wertetabelle für die nachfolgenden Funktionen. Zeichnen Sie die Zahlenpaare in ein Koordinatensystem von $-4 \leq x \leq 4$ und skizzieren Sie die Funktion.

a) $f(x) = x^2 - 6$ b) $f(x) = -1/2\ x^2 + 4$ c) $f(x) = x^2 - 2x$ d) $f(x) = (x + 1)^2$

Aufgabe 4

Berechnen Sie den Scheitelpunkt der folgenden Parabeln und zeichnen Sie die Kurven:

a) $f(x) = 1/3 \cdot (x - 3)^2$ b) $f(x) = (x - 2)^2 + 5$ c) $f(x) = 3x^2 - 12x + 6$

Aufgabe 5

Zeichnen Sie die Umkehrfunktionen zu

$\boldsymbol{f_1}: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+, \boldsymbol{y = x^2}$ **und** $\boldsymbol{f_2}: \mathbb{R}_0^- \to \mathbb{R}_0^+, \boldsymbol{y = x^2}$

Aufgabe 6

Berechnen Sie die Nullstellen der folgenden Polynome:

a) $f(x) = x^2 - 3x - 2$ b) $f(x) = 2x^2 - 4x - 30$ c) $f(x) = 5x^2 - 20x + 20$

d) $f(x) = 2x^2 + 10x + 15$

Aufgabe 7

Zeichnen Sie die Umkehrfunktionen zu

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = x^3$

Aufgabe 8

Die Preis-Absatz-Funktion eines Monopolisten, der nur eine Produktsorte auf dem Markt absetzt, ist im Allgemeinen eine fallende lineare Funktion. Für die folgende Aufgabe sei diese gegeben durch die Gleichung $p(x) = 10 - 0{,}01 \cdot x$. Zusätzlich sind die variablen Kosten pro ME mit $K_v = 0{,}5$ GE und die Fixkosten mit $K_f = 1750$,– GE gegeben.

Berechnen Sie jene Menge, für die der Erlös maximal (= Scheitel!) ausfällt und die Gewinnschwellen.

Lösungen

Aufgabe 1

Polynome: b), d), f)

Aufgabe 2

Man bestimme die Koeffizienten a_i und den Grad der folgenden Polynome:
a) $a_0 = 1$, $a_1 = -1$, $a_2 = 2$; Grad = 2 b) $a_0 = 4$, $a_1 = -1$; Grad = 1
c) $a_0 = 0$, $a_1 = 3$, $a_2 = a_3 = 0$, $a_4 = 3{,}2$, $a_5 = 0{,}1$; Grad = 5
d) $a_0 = \dots = a_6 = 0$, $a_7 = 1$; Grad = 7
e) $a_0 = c$, $a_1 = a$, $a_2 = -b$, $a_3 = a_4 = a_5 = 0$, $a_6 = \pi$, $a_7 = -\sqrt{3}$; Grad = 7
f) $a_0 = -0{,}5$, $a_1 = 2{,}3$, $a_2 = 1$, $a_3 = 5{,}8$; Grad = 3

Aufgabe 3

	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
a)	10	3	-2	-5	-6	-5	-2	3	10
b)	-4	-1/2	2	7/2	4	7/2	2	-1/2	-4
c)	24	15	8	3	0	-1	0	3	8
d)	9	4	1	0	1	4	9	16	25

Aufgabe 4

Scheitel einer quadratischen Funktion der Form $a \cdot x^2 + b \cdot x + c$: $(-b/2a \mid c - b^2/4a)$
a) $S(3|0)$ b) $S(2|5)$ c) $S(2|-6)$

Aufgabe 5

$f_1: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+, \boldsymbol{y} = \sqrt{\boldsymbol{x}}$, und $f_2: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^-, \boldsymbol{y} = -\sqrt{\boldsymbol{x}}$

Aufgabe 6

a) $x_1 = 0{,}56$; $x_2 = -3{,}56$ b) $x_1 = -3$; $x_2 = 5$ c) $x_{1,2} = 2$
d) keine Nullstelle

Aufgabe 7

f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = \sqrt[3]{x}$

Aufgabe 8

$K(x) = 0{,}5x + 1750$; $E(x) = (10 - 0{,}01x) \cdot x$
$G(x) = -0{,}01x^2 + 9{,}5x - 1750$
max. Erlös bei 500ME (x_s) ($y_s = 2500$); die Gewinnschwellen sind bei $x_1 = 250$, $x_2 = 700$