

Übungsblatt 15: Differentialrechnung 1

Differentiationsregeln	Funktion	Ableitung
konstante Funktion	c	0
Potenzfunktion	x^n	$n \cdot x^{n-1}$
natürliche Exponentialfunktion	e^x	e^x
natürliche Logarithmusfunktion	$\ln x$	$1/x$
Exponentialfunktion	a^x	$a^x \cdot \ln a$
zusammengesetzte Funktionen		
Summenregel	$f(x) + g(x)$	$f'(x) + g'(x)$
Produktregel	$f(x) \cdot g(x)$	$f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Quotientenregel	$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$
Kettenregel	$f(g(x))$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Musterbeispiel

$$f(x) = e^{20x^2+3}$$

1. Erkennen, welche der Regeln hier angewandt werden muss: zusammengesetzte Funktion $f(x) = g(h(x))$ mit $g(x) = e^x$ und $h(x) = 20x^2 + 3$

2. Anwenden der Kettenregel: zuerst wird $g(x)$ abgeleitet und dann mit der Ableitung von $h(x)$ multipliziert

$$g'(x) = e^x$$

$$h'(x) = 20 \cdot 2 \cdot x^{2-1} = 40 \cdot x$$

$$f'(x) = e^{20x^2+3} \cdot 40 \cdot x = 40x \cdot e^{20x^2+3}$$

Aufgabe 1

Bilden Sie von den folgenden Funktionen die erste Ableitung:

a) $f(x) = 10$ b) $f(x) = x^2$ c) $f(x) = x^3 - 5$ d) $f(x) = 3x^2 + 4x - 7$ e) $f(x) = x^{-4}$

f) $f(x) = -5x^{1/2} - 3x^2 + 8x$ g) $f(x) = 0,1x^{2,5} - 3,2x^{0,4}$

Aufgabe 2

Bilden Sie von den folgenden Funktionen die erste Ableitung:

a) $f(x) = (x - 2) \cdot (x + 3)$ b) $f(x) = x^2 \cdot (5 - x^2)$ c) $f(x) = (x^3 - 5) \cdot 20$

d) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ e) $f(x) = \frac{1-x}{(x-1) \cdot (x+1)}$ f) $f(x) = \frac{5x^4 - 7x^3 + 10}{2x^3 - x}$

g) $f(x) = \sqrt[3]{3x^2 + 8x}$ h) $f(x) = (1-x) \cdot \sqrt{3x-2}$ i) $f(x) = (3x)^{-3} - 3 \cdot (2x + 3)^{-2} - 2x^{-1}$

Aufgabe 3

Bilden Sie von den folgenden Funktionen die erste Ableitung:

a) $f(x) = 3x \cdot \ln(x)$ b) $f(x) = e^{2x-1}$ c) $f(x) = (x^2 - 5) \cdot e^{-x}$ d) $f(x) = -2x^3 \cdot e^{-x/2}$

e) $f(x) = \frac{1}{2 \cdot \ln(3x)}$ f) $f(x) = \frac{3x^2}{e^{2x}}$ g) $f(x) = \frac{\ln(x^2)}{2e^x}$

h) $f(x) = \left(\frac{5x}{4x+3}\right)^2$

Aufgabe 4

Bilden Sie die dritte Ableitung der folgenden Funktionen:



$$(a) f(x) = 3x^7 + x^2 - 6x$$

$$(b) f(x) = 4 \cdot e^{2x}$$

$$(c) f(x) = 2 \cdot \ln x + e^{-x}$$

Aufgabe 5

Ist die Funktion $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{für } x < 0 \end{cases}$ zweimal differenzierbar?



Aufgabe 6

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = (x^2 + 2x) \cdot e^{-x}$.
Bestimmen Sie die ersten drei Ableitungsfunktionen.

Lösungen

Aufgabe 1

a) $f'(x) = 0$ b) $f'(x) = 2x$ c) $f'(x) = 3x^2$ d) $f'(x) = 6x + 4$ e) $f'(x) = -4x^{-5}$
f) $f'(x) = -5/2 x^{-1/2} - 6x + 8$ g) $f'(x) = 0,25x^{1,5} - 1,28x^{-0,6}$

Aufgabe 2

a) $f'(x) = 1 \cdot (x + 3) + (x - 2) \cdot 1 = 2x + 1$ b) $f'(x) = -4x^3 + 10x$ c) $f'(x) = 60x^2$
d) $f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$ e) $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ f) $f'(x) = \frac{10x^6 - 15x^4 + 14x^3 - 60x^2 + 10}{4x^6 - 4x^4 + x^2}$
g) $\frac{6x-8}{3 \cdot \sqrt[3]{(3x^2+8x)^2}}$ h) $\frac{-9x+7}{2 \cdot \sqrt{3x-2}}$ i) $-3^{-2} \cdot x^{-4} + 12 \cdot (2x+3)^{-3} + 2x^{-2}$

Aufgabe 3

a) $3 \cdot \ln x + 3$ b) $2e^{2x-1}$ c) $e^x \cdot (x^2 + 2x - 5)$ d) $e^{-x/2} \cdot (x^3 - 6x^2)$
e) $\frac{-1}{2x \cdot (\ln 3x)^2}$ f) $\frac{6x-6x^2}{e^{2x}}$ g) $\frac{1}{xe^x} - \frac{\ln x}{e^x}$ h) $\frac{150x}{(4x+3)^3}$

Rechenwege für einige Beispiele:

$$f(x) = \frac{1}{2 \cdot \ln(3x)} = \frac{1}{2} \ln(3x)^{-1}$$

e) $f'(x) = -\frac{1}{2} [\ln(3x)]^{-2} \cdot \frac{1}{3x} \cdot 3 = \frac{-1}{2x [\ln(3x)]^2}$

$$f(x) = \frac{\ln(x^2)}{2e^x} = \frac{2 \ln(x)}{2e^x} = \ln(x) e^{-x}$$

g) $f'(x) = \frac{1}{x} e^{-x} - \ln(x) e^{-x} = \frac{1}{xe^x} - \frac{\ln(x)}{e^x}$

h) $f(x) = \left(\frac{5x}{4x+3} \right)^2$
 $f'(x) = 2 \left(\frac{5x}{4x+3} \right) \cdot \frac{5(4x+3) - 20x}{(4x+3)^2} = \frac{200x^2 + 150x - 200x^2}{(4x+3)^3} = \frac{150x}{(4x+3)^3}$

Aufgabe 4

a) $630 x^4$ b) $32e^{2x}$ c) $4/x^3 - e^{-x}$

Aufgabe 6

$f(x) = (-x^2 + 2) \cdot e^{-x}$; $f'(x) = (x^2 - 2x - 2) \cdot e^{-x}$; $f''(x) = (-x^2 + 4x) \cdot e^{-x}$