

# Übungsblatt 14: Exponential- und logarithmische Gleichungen

Regeln für den Logarithmus

$a, b, d, x \in \mathbb{R}$  ;  $a, b, d > 0$ ,  $a \neq 1$ :

$$a^x = b \Leftrightarrow {}^a\log b = x$$

$${}^a\log(b \cdot c) = {}^a\log b + {}^a\log c$$

$${}^a\log(b/c) = {}^a\log b - {}^a\log c$$

$${}^a\log(b^c) = c \cdot {}^a\log b$$

$$a^{{}^a\log b} = b$$

$${}^a\log b = \frac{{}^d\log b}{{}^d\log a}$$

$${}^a\log \frac{1}{b} = -{}^a\log b$$

Eulersche Zahl:  $e = 2,718281\dots$

## Musterbeispiel

$$4^{x-1} = 5 \cdot 2^{2x-7} + (3^{x-2})^2$$

## Lösung

$$D = \mathbb{R}$$

1. Vereinfachen der Potenzen

$$(2^2)^{x-1} = 5 \cdot 2^{2x-7} + 3^{2x-4} \Rightarrow 2^{2x-2} = 5 \cdot 2^{2x-7} + 3^{2x-4}$$

2. Exponenten der Potenzen mit gleicher Basis werden vereinheitlicht

$$2^{2x-7+5} = 5 \cdot 2^{2x-7} + 3^{2x-4} \Rightarrow 2^5 \cdot 2^{2x-7} - 5 \cdot 2^{2x-7} = 3^{2x-4} \Rightarrow 27 \cdot 2^{2x-7} = 3^{2x-4}$$

3. Logarithmieren der beiden Seiten (in dem Fall zur Basis 2)

$${}^2\log(27 \cdot 2^{2x-7}) = {}^2\log(3^{2x-4})$$

4. Anwenden der Regeln für Logarithmus

$${}^2\log(27) + {}^2\log(2^{2x-7}) = {}^2\log(3^{2x-4})$$

$${}^2\log(3^3) + (2x-7) \cdot {}^2\log(2) = (2x-4) \cdot {}^2\log(3)$$

$$3 \cdot {}^2\log(3) + (2x-7) = 2x \cdot {}^2\log(3) - 4 \cdot {}^2\log(3)$$

$$2x \cdot (1 - {}^2\log(3)) = 7 - 3 \cdot {}^2\log(3) - 4 \cdot {}^2\log(3)$$

$$2x \cdot (1 - {}^2\log(3)) = 7 - 7 \cdot {}^2\log(3) \Rightarrow 2x \cdot (1 - {}^2\log(3)) = 7 \cdot (1 - {}^2\log(3))$$

$$2x = 7$$

5. Lösen der linearen Gleichung

$$x = 7/2$$

Lösungsmenge:  $L = \{7/2\}$

## Aufgabe 1

Man löse die folgenden Gleichungen in  $\mathbb{R}$ :

a)  $2^{3x}/16 = 2^x/128$

b)  $(3^2)^{x-1} = 3^6 \cdot 3^x$

c)  $5^{x-1} + 5^{x-2} = 5^{x+1} - 5^{x-2} - 9$

d)  $5 + 3^{x-1} + 3^{x-2} = 3^{x+1} - 3^{x-2}$

e)  $3^x \cdot 6^{x+1} = 4^{3x} \cdot 5^{1-x}$

## Aufgabe 2

In welcher Zeit verdoppelt sich ein Kapital, angelegt mit dem jährlichen Zinssatz von 12% (bei einfachem Zins und bei Zinseszins)?

## Aufgabe 3

2.500,- € werden auf einem Sparkonto angelegt. Der jährliche Zinsfuß beträgt 11%. Nach einigen Jahren werden 1.000,- € abgehoben. Nach fünf weiteren Jahren beträgt der Kontostand 15.807,19 €.

Zu welchem Zeitpunkt wurden die 1.000,- € abgehoben (bei jährlicher Kapitalisierung der Zinsen)?

#### **Aufgabe 4**



Berechnen Sie  $x$  ohne Taschenrechner:

a)  ${}^7\log(\sqrt[3]{49}) = x$       b)  ${}^x\log(27) = -\frac{3}{4}$       c)  ${}^{\frac{9}{4}}\log(x) = -0,5$

#### **Aufgabe 5**



Man berechne aus den folgenden Gleichungen die Variable  $x$ :

a)  ${}^a\log(\sqrt[s]{a^{-r}}) = x$ ,      b)  ${}^x\log(27) = -\frac{3}{2}$

#### **Aufgabe 6**



Die folgenden logarithmischen Gleichungen sind in  $\mathbb{R}$  zu lösen:

a)  $\lg(x-2) - \lg(x) = \lg(x+3) - \lg(x+10)$       b)  $\lg 7x^3 = \lg 14 + \frac{1}{2} \cdot \lg 9x^4$

c)  $\ln(5x^5) - 4 \cdot \ln(5x) = \ln(5)$

Anmerkung:  $\lg$  steht für  $\log$  zur Basis 10 und  $\ln$  für  $\log$  zur Basis  $e=2,718\dots$

#### **Aufgabe 7**



Lösen Sie die folgenden Formeln nach der Variablen in der Klammer auf:

a)  $a \cdot c^{2b-1} = d^{b+1}$  (nach  $b$ )

Versuchen Sie für die Zahlenwerte  $a = 2, c = 3$  und  $d = 4$  den Zahlenwert für  $b$  herauszufinden. Verwenden Sie einmal den  $\lg$  und einmal den  $\ln$ . Was fällt Ihnen auf?

b)  $\ln(\sqrt{b^2+1}) - a = 0$  (nach  $b$ )

c)  $Kq^n - A \frac{q^n - 1}{q - 1} = 0$  (nach  $n$ )

## Lösungen

### Aufgabe 1

a) Vereinfache, so weit wie möglich:

$$2^4 = 16 \text{ und } 2^7 = 128 \text{ daher } 2^{3x-4} = 2^{x-7} \Leftrightarrow 3x - 4 = x - 7 \Rightarrow L = \{-3/2\}$$

b)  $x = 8$

c)  $5^{x-2} = 9/118 \Rightarrow x = 0,401\dots$

d)  $x = \frac{\log(45) - \log(22)}{\log(3)} \cong 0,65$

e)  $x \cong -0,53$

### Aufgabe 2

$$K \cdot (1,12)^x = 2 \cdot K; x = \ln 2 / \ln 1,12$$

6,12 Jahre, oder ca. 6 Jahre und 45 Tage

$$K \cdot (1 + x \cdot 0,12) = 2 \cdot K \Rightarrow x = 8,32$$

### Aufgabe 3

$$(2\,500 \cdot 1,11^x - 1\,000) \cdot 1,11^5 = 15\,807,19 \Rightarrow x = 13,64$$

nach ca. 13 Jahren und 231 Tagen

### Aufgabe 4

a)  $7^x = 49^{1/3}$ , da  $49 = 7^2 \Rightarrow x = 2/3$       b)  $x = 3^{-4}$       c)  $x = 2/3$

### Aufgabe 5

a)  ${}^a \log (a)^{-r/s} = x \Leftrightarrow -r/s \cdot \log a = x \Rightarrow x = -r/s$

b)  $x = 27^{-2/3} = 3^{3 \cdot (-2/3)} = 1/9$

### Aufgabe 6

a)  $D = (2; \infty)$ ;  $\lg \frac{x-2}{x} = \lg \frac{x+3}{x+10} \Rightarrow (x-2) \cdot (x+10) = (x+3) \cdot x \Rightarrow x = 4$ ;  $L = \{4\}$

b)  $D = (0; \infty)$ ;  $\lg 7 + 3 \cdot \lg x = \lg 2 + \lg 7 + \lg 3 + 2 \cdot \lg x \Rightarrow x = 6$ ;  $L = \{6\}$

c)  $D = (0; \infty)$ ;  $x = 625$ ;  $L = \{625\}$

### Aufgabe 7

a)  $b = \frac{\log d + \log c - \log a}{2 \cdot \log c - \log d}$

Mit den konkreten Zahlenwerten erhalten wir für beide Logarithmen  $b = 2,209\dots \approx 2,21$ .

b)  $b_{1,2} = \pm \sqrt{e^{2a} - 1}$

c)  $n = \frac{\ln \frac{A}{A - K(q-1)}}{\ln q}$