Übungsblatt 9: Ungleichungen und Betragsgleichungen

Ungleichungen

Für alle a,b,c$\in\mathbb{R}$ gilt: $a > b \Leftrightarrow a + c \geq b + c$.
Für alle a,b,c$\in\mathbb{R}$, $c > 0$ gilt: $a \geq b \Leftrightarrow a.c \geq b.c$.
Für alle a,b,c$\in\mathbb{R}$, $c < 0$ gilt: $a \geq b \Leftrightarrow a.c \leq b.c$

geschlossenes Intervall $[1; 2] = \{x\in\mathbb{R} \mid x \geq 1 \text{ und } x \leq 2\}$

offenes Intervall $(1; 2) =]1; 2[= \{x\in\mathbb{R} \mid x > 1 \text{ und } x < 2\}$

Musterbeispiel

$-3x - 7 \leq 2x + 5$

$D = \mathbb{R}$

1. äquivalente Umformungen, so dass auf der linken Seite nur mehr x steht:

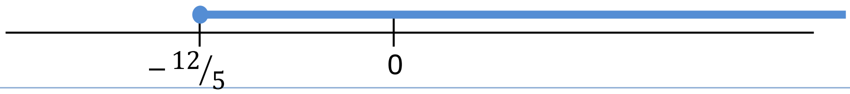
$-3x - 7 \leq 2x + 5 \quad | +7 - 2x$

$-5x \leq 12 \quad |: (-5)$

$x \geq -12/5$

Lösungsmenge L = [12/5; +∞)

2. Darstellung entlang eines Zahlenstrahls:



Aufgabe 1

Geben Sie die folgenden Mengen mit Hilfe von Intervallen an:

$M_1 = \{x\in\mathbb{R} \mid x \leq a\}$ $M_2 = \{x\in\mathbb{R} \mid x \geq 7\}$ $M_3 = \{x\in\mathbb{R} \mid x \leq 3 \wedge x \geq -7\}$

$M_4 = \{x\in\mathbb{R} \mid x \geq 7 \vee x \leq 3\}$ $M_5 = \{x\in\mathbb{R} \mid x > 0 \wedge x < 5\}$ $M_6 = \{x\in\mathbb{R} \mid x \leq 3 \wedge x \geq 7\}$

$M_7 = \{x\in\mathbb{R} \mid x \leq -3 \vee x \geq 1\}$

Aufgabe 2

Für welche Werte von x mit $x \in \mathbb{R}$ gelten die folgenden Ungleichungen?

a) $x + 2 < 2x - 3$ b) $3x - 50 > 12x + 76$ c) $3x - 20 \leq 10 + 6x$

Aufgabe 3

Zwei Liter 36%iger Lösung sind mit Wasser so zu verdünnen, dass eine Flüssigkeit entsteht, deren Konzentration größer als 10% ist. Wie viel Liter Wasser darf man maximal dazugeben?

Aufgabe 4

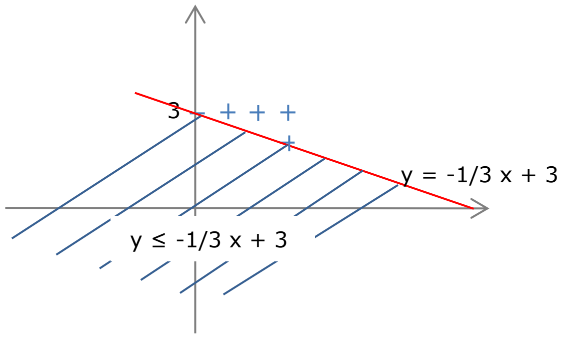
Die Glieder der Zahlenfolge $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$ mit $n \in \mathbb{N}$ werden immer größer, aber sie bleiben immer kleiner als 1. Ab welchem Glied sind sie größer als 0,9?

Musterbeispiel Skizzieren im Koordinatensystem

$x + 3y \leq 9$

$D = \mathbb{R}$

1. Umformen, so dass y auf der linken Seite alleine steht
   $x + 3y \leq 9 \qquad | +7 - 2x$
   $3y \leq -x + 9 \qquad |: (-5)$
   $y \leq -1/3\, x + 3$
2. Zeichnen der Funktion $y = -1/3\, x + 3$ im Koordinatensystem



Aufgabe 5

Skizzieren Sie die Lösungsmenge der folgenden Ungleichungen in einem kartesischen Koordinatensystem:

a) $5x + 4y \leq 20$ b) $3y \geq 6x - 9$ c) $4x - 3y > 12$ d) $6x - 9y + 18 \leq 0$
e) $6y \leq 21$ f) $4x > 14$

Betragsgleichungen und -ungleichungen

Musterbeispiel

$|5 - 2x| \geq x + 1$

1. Zerlegung der reellen Zahlen in 2 Intervalle, und zwar in jene, in denen der Betragsterm positiv oder negativ ist:
   für $x \leq 5/2$ gilt: $5 - 2x \geq 0$; für $x > 5/2$ gilt: $5 - 2x < 0$.
   Bei der Lösung müssen diese beiden Fälle unterschieden werden.
2. Lösen der Ungleichung für Fall 1: $x \leq 5/2$ (d.h. für das Intervall $(-\infty; 5/2]$)
   $5 - 2x \geq x + 1 \quad \Rightarrow -3x \geq -4 \Rightarrow x \leq 4/3 < 5/2 \Rightarrow$ zulässige Lösung
   $L_1 = \{x \in \mathbb{R} |\ x \leq 4/3\}$
3. Lösen der Ungleichung für Fall 2: $x > 5/2$ (d.h. für das Intervall $(5/2; +\infty)$)
   $-(5 - 2x) \geq x + 1 \quad \Rightarrow x \geq 6 > 5/2 \Rightarrow$ zulässige Lösung
   $L_2 = \{x \in \mathbb{R} |\ x \geq 6\}$

Lösungsmenge $L = L_1 \cup L_2 = \{x \in \mathbb{R} |\ x \leq 4/3\} \cup \{x \in \mathbb{R} |\ x \geq 6\}$

Aufgabe 6

Geben Sie die folgenden Mengen mit Hilfe von Intervallen an:

$M1 = \{x \in R|\ |x| \leq a\}$, $M2 = \{x \in R|\ |x| \geq a\}$, $M3 = \{x \in R|\ |x - 5| \leq 1\}$, $M4 = \{x \in R|\ |x - 5| \geq 1\}$

Aufgabe 7

Finden Sie die Lösungsmenge zu folgenden Ungleichungen. Versuchen Sie die Lösungsmengen entlang eines Zahlenstrahls darzustellen.

a) $x^2 - 5x - 6 > 0$ b) $x^2 - 5x + 6 \leq 0$ c) $|x| < a$ d) $|x| > a$ e) $x^2 \geq x + 2$

Hinweis: Zerlegung in Linearfaktoren; $x^2 <$ (oder $\leq$) a $\Leftrightarrow$ $|x| <$ (oder $\leq$) $\sqrt{a}$.

Lösungen

Aufgabe 1

$M_1 = (-\infty, a]$, $M_2 = [7, \infty)$, $M_3 = [-7, 3]$; $M_4 = (-\infty, 3] \cup [7, \infty)$, $M_5 = (0; 5)$; $M_6 = []$, $M_7 = (-\infty, -3] \cup [1, \infty)$,

Aufgabe 2

a) $L = \{x \in \mathbb{R}| \ x > 5\}$ b) $L = \{x \in \mathbb{R}| \ x < -14\}$ b) $L = \{x \in \mathbb{R}| \ x \geq -6\}$

Aufgabe 3

$2 \cdot 0{,}36 > (2 + x) \cdot 0{,}10 \Rightarrow x < 5{,}2$ Liter Wasser

Aufgabe 4

$x/(x+1) > 0{,}9 \Rightarrow x > 9$, d.h. ab $n = 10$

Aufgabe 6

$M_1 = [-a;a]$, $M_2 =]-\infty, -a] \cup [a, \infty[$, $M_3 = [4, 6]$, $M_6 =]-\infty, 4] \cup [6, \infty[$,

Aufgabe 7

a) $x^2 - 5x - 6 > 0 \Leftrightarrow (x - 6)(x + 1) > 0 \Leftrightarrow [(x - 6) > 0 \wedge (x + 1) > 0] \vee [(x - 6) < 0 \wedge (x + 1) < 0] \Leftrightarrow x < -1 \vee x > 6$, daraus ergibt sich die Lösungsmenge $L = \{x \in R| \ x < -1 \vee x > 6\}$

b) $x^2 - 5x + 6 \leq 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x - 3) \leq 0 \Leftrightarrow [(x - 2) \geq 0 \wedge (x - 3) \leq 0] \vee [(x - 2) \leq 0 \wedge (x - 3) \geq 0] \Leftrightarrow x \geq 2 \wedge x \leq 3$, daraus ergibt sich die Lösungsmenge $L = \{x \in R | 2 \leq x \leq 3\}$.

c) $|x| < a \Leftrightarrow (x > -a) \wedge (x < a) \Leftrightarrow L = \{x \in R \mid -a < x < a\}$,

d) $|x| > a \Leftrightarrow (x < -a) \vee (x > a) \Leftrightarrow L = \{x \in R \mid x < -a \vee x > a\}$.

e) $L = \{x \in \mathbb{R}| \ x \leq -1 \vee x \geq 2\}$