Übungsblatt 7: Lineare Funktionen II

$y = f(x);\ f: D \rightarrow W$ D … Definitionsbereich, W … Wertebereich

Geradengleichung: $y = k \cdot x + d$

Ökonomische Begriffe
$K_{ges}(x) = (K_{var}) + (K_{fix})$
x … Stückzahl
$K_{ges}(x)$ … Gesamtkosten, von x abhängig
$K_{var}(x)$ … variable (oder proportionale) Kosten, von x abhängig
(= Kosten, die von der Produktionsmenge abhängig sind, z.B. Materialkosten, Stromkosten…)
K_{fix} … fixe Kosten, von x unabhängig
(= Kosten, die entstehen, auch wenn man nichts produziert, z.B. Miete/Pacht, Verwaltung,…)

<u>Musterbeispiel</u>

Ein Betrieb stellte für die letzten beiden Abrechnungsperioden folgende Daten fest.

Periode	1	2
Gesamtkosten (€/Periode)	2.000	3.000
produzierte Menge (Stk/Periode)	500	1.000

Wie lautet die Kostenfunktion dieses Betriebes? Wie hoch sind die fixen Kosten und die variablen Kosten?

<u>Lösung</u>

Gesucht: lineare Funktion $y = k \cdot x + d$ (wobei $K_{ges} = y$ und $K_{fix} = d$)

1. Gleichungen mit den Daten aufstellen
   In der 1. Periode hat man Gesamtkosten von 2000€ bei einer Produktion von 500 Stück: $K_{ges}(500) = 2000$. Die Anzahl entspricht der Variablen x, die Kosten der Variablen y, eingesetzt in die Geradengleichung erhält man $2000 = k \cdot 500 + d$
   $K_{ges}(1000) = 3000 \Rightarrow 3000 = k \cdot 1000 + d$
2. Lösen des linearen Gleichungssystems
   $2000 = k \cdot 500 + d$
   $3000 = k \cdot 1000 + d$
   $\Rightarrow k = 2;\ d = 1000$

$K_{ges} = 2 \cdot x + 1000;\ K_{var}(x) = 2 \cdot x;\ K_{fix} = 1000$

Aufgabe 1

Es wird ein Betrag fest verzinslich zu 6% bei einer Bank angelegt. Zum gleichen Zeitpunkt wird ein weiteres Konto mit einem um 15.000,– € höheren Betrag eröffnet. Der ebenfalls feste Zinsfuß beträgt hier 6,5%. Nach einem Jahr, indem keine Kontobewegung erfolgte, ist die Gesamtsumme von 37.225,– € erwirtschaftet worden.
Wie hoch sind die Ausgangsbeträge?

Aufgabe 2

Eine Baumaschine mit den Anschaffungswert von 60.000,– € soll in acht Jahren voll abgeschrieben werden. Die Abschreibung soll linear erfolgen, d. h. der Abschreibungsbetrag soll sich im Abschreibungszeitraum nicht ändern.
Welche lineare Funktion lässt sich mit dem Buchwert (Restwert) der Maschine in Abhängigkeit von der Zeit aufstellen? Wie hoch ist der Buchwert (Restwert) am Anfang des siebenten Jahres?

Aufgabe 3

Ein Mobilfunk-Betreiber bietet folgende drei Tarifmodelle an:

--------------------	Tarif A	Tarif B	Tarif C
Grundgebühr	EURO 5,--	EURO 10, --	EURO 25, --
Gesprächsgebühr	EURO/min 0,05	EURO/min 0,02	EURO/min 0,--

Die wesentliche Frage ist nun, welches der beiden Tarifmodelle das günstiger ist. Versuchen Sie mit Hilfe des Funktionsbegriffs eine umfassende Antwort auf diese Frage zu geben:

a) Stellen Sie für jeden Tarif die Funktionsgleichung auf.
b) Zeichnen Sie die Funktionsgraphen in ein gemeinsames Koordinatensystem.
   Achten Sie dabei darauf, wie sie die Skalierung und die Achsen wählen müssen um den wesentlichen Sachverhalt anschaulich darzustellen.
c) Erklären Sie, was alles aus den Graphen ablesbar ist (Interpretation).
d) Inwiefern ist nun Tarif A, Tarif B oder Tarif C günstiger?

Aufgabe 4

In einem Unternehmen soll die Produktion eines neuen Artikels aufgenommen werden. Dazu werden dem Unternehmen alternativ zwei Herstellungsverfahren angeboten, die sich aus Kostensicht wie folgt unterscheiden:
Bei Fertigung nach Verfahren A fallen monatlich fixe Kosten von 6.250,– GE an. Die proportionalen Kosten betragen 0,75 GE.
Bei Verfahren B ergeben sich 9.000,– GE fixe Kosten monatlich und 0,50 GE proportionale Kosten.
Es ist ein Fertigungsvergleich durchzuführen. Unter welchen Voraussetzungen ist welches Verfahren günstiger?

<u>Aufgabe 5</u>

Ein Industriebetrieb („Ein-Produkt-Betrieb") bezieht einen Rohstoff zum Einkaufpreis von 1,50 GE pro kg. Für die Herstellung einer Mengeneinheit des Fertigproduktes werden jeweils 2 kg des Rohstoffes benötigt.

<u>Weitere variable Kosten pro Mengeneinheit</u>:

Fertigungslöhne	1,70 GE
Variable Fertigungsgemeinkosten	0,80 GE
Vertriebsgemeinkosten	0,50 GE

<u>Fixe Kosten pro Monat</u>:

Fertigungsgemeinkosten	11.000,- GE
Vertriebsgemeinkosten	5.000,- GE
Andere Gemeinkosten	2.000,- GE

Der Verkaufspreis einer Mengeneinheit des Fertigproduktes ist mit 12,– GE festgesetzt worden.

Zu bestimmen ist die Mengeneinheit, ab der das Unternehmen kostendeckend arbeitet: der Break-Even-Point (Kosten = Erlös). Zusätzlich soll die Gewinnfunktion graphisch dargestellt werden.

Lösungen

Aufgabe 1

x·1,06 + (x + 15 000)·1,065 =37.225
x = 10 000, [L = {(10 000, 25 000)}]

Aufgabe 2

R = 60 000 – 7 500·t (t = 1,…,8)
R_6 = 15 000,- GE

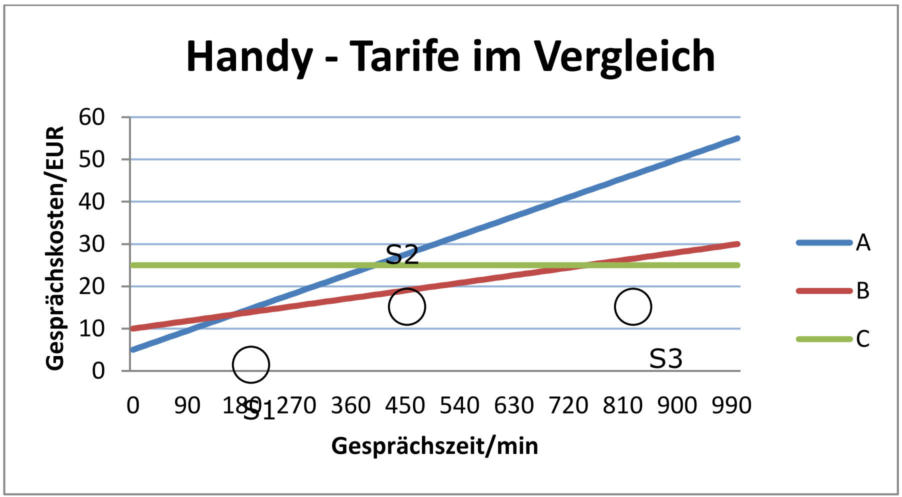
Aufgabe 3

a) Allgemeine Form der *linearen Kostenfunktion*: $K(t) = k_v \cdot t + F$

Wobei K … Gesamtkosten; hier: Gesprächskosten (pro Monat)
t … Umgesetzte Menge; hier: Gesprächszeit (pro Monat)
k_v … variable Kosten; hier: Gesprächsgebühr
F … fixe Kosten; hier: Grundgebühr

$A: K(t) = 0{,}05 \cdot t + 5$ $\quad B: K(t) = 0{,}02 \cdot t + 10$ $\quad C: K(t) = 25$

b) Die Graphen um die Tarife zu vergleichen:



c) Kosten Wachstum, Vergleich von Tarifen

d) Schnittpunkte:

$A \cap B = \{S1(166,\dot{6} \mid 13,\dot{3})\}$	$A \cap C = \{S2(400 \mid 25)\}$	$B \cap C = \{S3(750 \mid 25)\}$

Es gelten in den Gesprächszeit-Intervallen die folgenden Tarifungleichungen:

$[0;166,\dot{6}]$	$[166,\dot{6};400]$	$[400;750]$	$[750;44640]$
$A \le B \le C$	$B \le A \le C$	$B \le C \le A$	$C \le B \le A$

Aufgabe 4

$F_A(x)$ = 0,75x + 6 250, $f_B(x)$ = 0,5x + 9 000
Verfahren A ist für weniger als 11 000 Einheiten günstiger.

Aufgabe 5

E(x) = 12x; K(x) = 6x + 18000
x = 3000