

# Übungsblatt 13: Bruch- und Wurzelgleichungen

## Bruchgleichungen

### Musterbeispiel

$$\frac{3}{4x-3} = \frac{1}{x}$$

### Lösung

Definitionsmenge: Der Nenner darf nicht null werden, daher setzt man jeden Nenner null und erhält somit jene Werte von  $x$ , die ausgeschlossen werden müssen:

$$4x - 3 \neq 0 \text{ und } x \neq 0 \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{3}{4}\}$$

1. Brüche erweitern, so dass beide den gemeinsamen Nenner haben

$$\frac{3 \cdot x}{x \cdot (4x - 3)} = \frac{1 \cdot (4x - 3)}{(4x - 3) \cdot x}$$

2. Multiplizieren mit gemeinsamen Nenner

$$\frac{3 \cdot x}{x \cdot (4x - 3)} = \frac{(4x - 3)}{(4x - 3) \cdot x} \cdot x \cdot (4x - 3) \Rightarrow 3x = 4x - 3$$

3. Lösen der linearen Gleichung

$$x = 3$$

Lösungsmenge:  $L = \{3\}$

### **Aufgabe 1**

Bestimmen Sie die Definitionsmengen und lösen Sie die folgenden Bruchgleichungen in  $\mathbb{R}$ :

a)  $\frac{1}{x-3} = 5$

b)  $\frac{4}{x-2} = \frac{2}{x+1}$

c)  $\frac{1}{1-x} = \frac{1}{x-1}$

d)  $\frac{1}{x} = 0$

e)  $\frac{3x-5}{5} - \frac{8+3x}{6} = 2 - \frac{7-3x}{3}$

f)  $3 + \frac{x-2}{4} = \frac{2x+6}{6}$

g)  $\frac{3x-5}{6x^2} + \frac{3x-1}{3x} = \frac{-(9-5x)}{6x}$

h)  $9 = \frac{3x+1}{4} - \frac{2}{x-4}$

i)  $\frac{7}{3} - \frac{3x+1}{6} = \frac{2}{6-x}$

### **Aufgabe 2**

Lösen Sie die folgenden Bruchgleichungen und geben Sie die Definitionsmenge an:

a)  $\frac{-5}{1-x} = \frac{4x+6}{x+2} - \frac{2x-1}{x-1}$     b)  $\frac{-10}{2-x} = \frac{2x-1}{x-2} - \frac{3x-4}{x+1}$     c)  $\frac{x+3}{x+2} = \frac{x-2}{x-4}$     d)  $\frac{40}{v^2-25} - \frac{v+5}{v-5} = -\frac{v-5}{v+5}$

e)  $\frac{5}{x-1} + \frac{6}{x-2} = \frac{10x+4}{x^2-3x+2}$

f)  $\frac{x-2}{x+2} + \frac{x+5}{x-4} = \frac{x^2-4x+12}{x^2-2x-8}$

g)  $\frac{x+7}{x^2-4} + \frac{4x-3}{4x-8} = \frac{5+3x}{6+3x}$

h)  $1 - \frac{x^2}{x^2-3x+2} = \frac{9}{3x-6} + \frac{1}{x-1}$

i)  $\frac{x^2-6x-70}{x^2-0,5x-5} - \frac{2}{x+2} = 0$

## Wurzelgleichungen

### Musterbeispiel

$$\sqrt{x-1} + 3 = x$$

### Lösung

Definitionsmenge: Der Term unter der Wurzel darf nicht negativ werden, daher setzt man den Term null und findet somit jene Werte von  $x$ , die ausgeschlossen werden müssen:

$$x - 1 \geq 0 \Rightarrow D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\} \quad (D = [1; \infty) )$$

1. Gleichung umformen, so dass der Wurzelterm auf einer Seite alleine steht

$$\sqrt{x-1} = -3 + x$$

2. Quadrieren der Gleichung

$$(\sqrt{x-1})^2 = (-3+x)^2$$

$$x - 1 = 9 - 6x + x^2 \Rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0$$

3. Lösen der quadratischen Gleichung

$$x_1 = 5; x_2 = 2$$

4. Kontrolle, ob die gefundenen Lösungen „echte“ Lösungen der Wurzelgleichung sind (durch Einsetzen in die ursprüngliche Gleichung)

$$\sqrt{5-1} + 3 = 5 \Rightarrow x_1 = 5 \text{ ist Lösung der Wurzelgleichung}$$

$$\sqrt{2-1} + 3 \neq 2 \Rightarrow x_2 = 2 \text{ ist keine Lösung der Wurzelgleichung}$$

Lösungsmenge:  $L = \{5\}$

### **Aufgabe 4**

a)  $\sqrt{2x} = 4$

b)  $\sqrt{x+1} = 5$

c)  $\sqrt{x-1} = 3$

d)  $-x + \sqrt{x+3} = 1$

e)  $-3 + \sqrt{12x-3} = 0$

### **Aufgabe 5**

a)  $\sqrt{2+x} + \sqrt{4x-3} = 2$

b)  $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} = 1$

c)  $\sqrt{x+5} = \sqrt{2x+3} + 1$

d)  $\sqrt{x+2} + \sqrt{2x+7} = 4$

## Lösungen

### Aufgabe 1

a)  $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}, L = \{\frac{16}{5}\}$  b)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}, L = \{-\frac{5}{2}\}$  c)  $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}, L = \{\}$

d)  $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}, L = \{\}$  e)  $D = \mathbb{R}, L = \{-\frac{20}{9}\}$

f)  $D = \mathbb{R}, L = \{18\}$

g)  $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}, L = \{-5 \pm \sqrt{30}\}$

h)  $D = \mathbb{R} \setminus \{4\}, L = \{11/3; 12\}$

i)  $D = \mathbb{R} \setminus \{6\}, L = \{3; 22/3\}$

### Aufgabe 2

a)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}, L = \{\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{37}\}$  b)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}, L = \{\}$

c)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 4\}, L = \{-8\}$  d)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-5; 5\}, L = \{2\}$

e)  $D = \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}, L = \{20\}$  f)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 4\}, L = \{-3\}$  g)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}, L = \{-106/31\}$

h)  $D = \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}, L = \{\}$  i)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2.5\}, L = \{-5; 13\}$

### Aufgabe 4

Bei den Wurzelgleichungen muss man die Probe machen (= Einsetzen der gefundenen Lösungen), da durch das Quadrieren „Lösungen“ dazukommen können.

a)  $D = [0; \infty) L = \{8\}$  b)  $D = [-1; \infty) L = \{24\}$

c)  $D = \{x \mid x \geq 1\} L = \{10\}$

d)  $D = \{x \mid x \geq -3\}; x_1 = 1, x_2 = -2; L = \{1\}$

e)  $D = [1/4; \infty) L = \{1\}$

### Aufgabe 5

a)  $D = [3/4; \infty) L = \{7/9\}$   $x_1 = 7$  keine Lsg

b)  $D = [1; \infty) L = \{\}$   $x_1 = 2$  keine Lsg

c)  $D = \{x \mid x \geq -3/2\}; L = \{-1\}$   $x_1 = 11$  keine Lsg

d)  $D = \{x \mid x \geq -3\}; L = \{9\}$   $x_1 = 21$  keine Lsg