Übungsblatt 2: Rechnen mit Summen

Index

2, 3, 5, 7, 9 $\Rightarrow$ $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$, $a_4 = 7$, $a_5 = 9$

Summe

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

$$\sum_{i=m}^{n} (d \cdot a_i) = d \cdot \sum_{i=m}^{n} a_i \qquad \sum_{i=m}^{n} (a_i + b_i - c_i) = \sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=m}^{n} b_i - \sum_{i=m}^{n} c_i \qquad \sum_{i=1}^{n} d = \underbrace{d + \cdots + d}_{n\ \text{Stück}} = n \cdot d$$

$$\sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=n+1}^{N} a_i = \sum_{i=m}^{N} a_i \qquad \sum_{i=m}^{n} i = (n+m) \cdot \frac{(n-m+1)}{2}$$ (Gaußsche Summenformel)

Musterbeispiel

$$\sum_{i=1}^{5} (1+i)^{i-1} =$$

Lösung

1. Die einzelnen Terme werden für den Platzhalter i berechnet, d.h. für i werden nacheinander die Zahlen 1, 2, 3, 4 und 5 eingesetzt:
   - $i = 1 \Rightarrow$ 1. Term: $(1 + \mathbf{1})^{\mathbf{1-1}} = 2^0 = 1$
   - $i = 2 \Rightarrow$ 2. Term: $(1 + \mathbf{2})^{\mathbf{2-1}} = 3^1 = 3$
   - $i = 3 \Rightarrow$ 3. Term: $(1 + \mathbf{3})^{\mathbf{3-1}} = 4^2 = 16$
   - $i = 4 \Rightarrow$ 4. Term: $(1 + \mathbf{4})^{\mathbf{4-1}} = 5^3 = 125$
   - $i = 5 \Rightarrow$ 5. Term: $(1 + \mathbf{5})^{\mathbf{5-1}} = 6^4 = 1296$
2. Die Terme werden zusammengezählt (aufsummiert):

$$\sum_{i=1}^{5} (1+i)^{i-1} = 1 + 3 + 16 + 125 + 1296 = 1441$$

Aufgabe 1

Berechnen Sie die nachfolgenden Summen:

a) $\sum_{i=1}^{10} i$ b) $\sum_{k=1}^{4} \frac{1}{k}$ c) $\sum_{k=1}^{5} k^2$ d) $\sum_{k=3}^{10} k^3$ e) $\sum_{k=2}^{6} (-1)^k \cdot k$

Aufgabe 2

Berechnen Sie bei a) und b) die Summen und stellen Sie bei c) und d) die Summen ohne Summenzeichen dar:

a) $\sum_{i=5}^{10} a_i$ mit $a_i = i$ b) $\sum_{k=1}^{10} a_k$ mit $a_k = 2 \cdot (k-1)$ c) $\sum_{k=0}^{10} (-1)^k \cdot a_k$ d) $\sum_{i=1}^{10} a_i b_i$ e) $\sum_{i=1}^{7} a_{ij} b_{jk}$

Aufgabe 3

Stellen Sie die folgenden Ausdrücke mithilfe des $\sum$–Zeichens dar:

a) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$ b) $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}$ c) $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3$

d) $x_0 + x_1 + \ldots + x_n$ e) $a_0x_0 + a_1x_1 + \ldots + a_kx_k$ f) $1+0+1+4+\ldots+(n-1)^2$

Aufgabe 4

Berechnen Sie die folgenden Summen:

a) $\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{1+(-1)^k}{2}$ b) $\sum_{k=m}^{n} (b_1 + c)$ c) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1+(-1)^{2k}}{2}$

Lösungen

Aufgabe 1

a) $\sum_{i=1}^{10} i$ = 1+2+3+…+10 = 11·5 = 55 b) $\frac{25}{12}$ c) 55 d) 3016 e) 4

Aufgabe 2

a) $\sum_{i=5}^{10} a_i = a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10}$ = 5 + 6+ 7+ 8 +9 +10 = 45

b) $\sum_{k=1}^{10} a_k$ = 2·(0 + 1 + 2 +3 + 4 + 5 + 6 + 7+ 8 + 9) = 90

c) $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \pm \ldots - a_9 + a_{10}$ d) $a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_{10}b_{10}$

e) $a_{1j}b_{jk} + a_{2j}b_{jk} + \ldots + a_{7j}b_{jk}$ [$= b_{jk} \cdot (a_{1j} + a_{2j} + \ldots + a_{7j})$]

Aufgabe 3

a) $\sum_{k=0}^{6} \frac{(-1)^k}{k+1}$ b) $\sum_{k=1}^{5} \frac{x^k}{k}$ c) $\sum_{k=1}^{n} k^3$ d) $\sum_{k=0}^{n} x_k$ e) $\sum_{i=0}^{k} a_i x_i$ f) $\sum_{k=0}^{n} (k-1)^2$

Aufgabe 4

a) n+1 b) (n–m+1)·(b_1 + c) c) n

ad a): Es gibt 2 Möglichkeiten, wie man diese Summe berechnen kann:

1) Man trennt die Summe: $\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{2}$ = (2n+2)·1/2 + (2n+2)·0
2) Man überlegt sich, was passiert, wenn $(-1)^k = -1$; d.h. bei ungeraden k fällt der Term weg (= 0), somit müssen nur die geraden Terme (= 1) (n+1)-mal addiert werden.