Übungsblatt 14: Exponential- und logarithmische Gleichungen

Rechenregeln für Logarithmen

$a, b, d, x \in \mathbb{R}$; $a, b, d > 0$; $a, d \neq 1$:

$a^x = b \iff {}^a\log b = x$ a…Basis; b…Numerus; x…Logarithmus

${}^a\log(b \cdot c) = {}^a\log b + {}^a\log c$ ${}^a\log(b/c) = {}^a\log b - {}^a\log c$ ${}^a\log\frac{1}{b} = -{}^a\log b$

${}^a\log b^c = c \cdot {}^a\log b$ ${}^a\log \sqrt[c]{b} = \frac{1}{c} \cdot {}^a\log b$ $a^{{}^a\log b} = b$

Basiswechsel

${}^a\log b = \frac{{}^d\log b}{{}^d\log a}$, z.B. ${}^{10}\log b = \frac{{}^e\log b}{{}^e\log 10} = \frac{\ln b}{\ln 10} \approx \frac{\ln b}{2{,}303}$, ${}^2\log b = \mathrm{ld}\, b = \frac{{}^e\log b}{{}^e\log 2} = \frac{\ln b}{\ln 2} \approx \frac{\ln b}{0{,}693}$

log … Logarithmus allgemein lg oder ^{10}log ... dekadischer Logarithmus (Basis 10)

ld oder lb oder ^{2}log ... dualer oder binärer Logarithmus (Basis 2)

ln (manchmal auch log) … natürlicher Logarithmus (Basis e = 2,718281828459…)

Musterbeispiel

$4^{x-1} = 5 \cdot 2^{2x-7} + (3^{x-2})^2$

Lösung

D = $\mathbb{R}$

1. Vereinfachen der Potenzen
   $(2^2)^{x-1} = 5 \cdot 2^{2x-7} + 3^{2x-4} \Rightarrow 2^{2x-2} = 5 \cdot 2^{2x-7} + 3^{2x-4}$
2. Exponenten der Potenzen mit gleicher Basis werden vereinheitlicht
   $2^{2x-7+5} = 5 \cdot 2^{2x-7} + 3^{2x-4} \Rightarrow 2^5 \cdot 2^{2x-7} - 5 \cdot 2^{2x-7} = 3^{2x-4} \Rightarrow 27 \cdot 2^{2x-7} = 3^{2x-4}$
3. Logarithmieren der beiden Seiten (in dem Fall zur Basis 2)
   ${}^2\log(27 \cdot 2^{2x-7}) = {}^2\log(3^{2x-4})$
4. Anwenden der Regeln für Logarithmus
   ${}^2\log(27) + {}^2\log(2^{2x-7}) = {}^2\log(3^{2x-4})$ | ${}^a\log(b \cdot c) = {}^a\log b + {}^a\log c$
   ${}^2\log(3^3) + (2x - 7) \cdot {}^2\log(2) = (2x - 4) \cdot {}^2\log(3)$ | ${}^a\log(b^c) = c \cdot {}^a\log b$ und $27 = 3^3$
   $3 \cdot {}^2\log(3) + (2x - 7) = 2x \cdot {}^2\log(3) - 4 \cdot {}^2\log(3)$
   $2x \cdot (1 - {}^2\log(3)) = 7 - 3 \cdot {}^2\log(3) - 4 \cdot {}^2\log(3)$
   $2x \cdot (1 - {}^2\log(3)) = 7 - 7 \cdot {}^2\log(3) \Rightarrow 2x \cdot (1 - {}^2\log(3)) = 7 \cdot (1 - {}^2\log(3))$
   $2x = 7$
5. Lösen der linearen Gleichung
   $x = {}^7/_2$; Probe passt.

Lösungsmenge: $L = \{{}^7/_2\}$

Aufgabe 1

Man löse die folgenden Gleichungen in $\mathbb{R}$:

a) $2^{3x}/16 = 2^x/128$ b) $(3^2)^{x-1} = 3^6 \cdot 3^x$ c) $5^{x-1} + 5^{x-2} = 5^{x+1} - 5^{x-2} - 9$

d) $5 + 3^{x-1} + 3^{x-2} = 3^{x+1} - 3^{x-2}$ e) $3^x \cdot 6^{x+1} = 4^{3x} \cdot 5^{1-x}$ f) $5^{x+1} = 7^{x-1}$

Aufgabe 2

In welcher Zeit verdoppelt sich ein Kapital, angelegt mit dem jährlichen Zinssatz von 12 %

a) bei einfachem Zins?

b) bei Zinseszins, jährlich kapitalisiert?

c) bei Zinseszins, halbjährlich kapitalisiert?

Aufgabe 3

2500,– € werden auf einem Sparkonto angelegt. Der jährliche Zinsfuß beträgt 11 %. Nach einigen Jahren werden 1000,– € abgehoben. Nach fünf weiteren Jahren beträgt der Kontostand 15807,19 €. Zu welchem Zeitpunkt wurden die 1000,– € abgehoben (bei jährlicher Kapitalisierung der Zinsen)?

Übungsblatt 14: Exponential- und logarithmische Gleichungen

Aufgabe 4

Berechnen Sie x ohne Taschenrechner:

a) ${}^{7}\log\left(\sqrt[3]{49}\right) = x$ b) ${}^{\frac{9}{4}}\log x = -\frac{1}{2}$

Aufgabe 5

Man berechne aus den folgenden Gleichungen die Variable x:

a) $x = {}^{a}\log\left(\sqrt[s]{a^{-r}}\right) = \cdots$

b) ${}^{x}\log 27 = -\frac{3}{4}$

Aufgabe 6

Die folgenden logarithmischen Gleichungen sind in $\mathbb{R}$ zu lösen:

a) $\lg(x-2) - \lg(x) = \lg(x+3) - \lg(x+10)$

b) $\lg(7x^3) = \lg 14 + \frac{1}{2} \cdot \lg(9x^4)$

c) $\ln(5x^5) - 4 \cdot \ln(5x) = \ln(5)$

Aufgabe 7

Lösen Sie die folgenden Formeln nach der Variablen in der Klammer auf:

a) $a \cdot c^{2b-1} = d^{b+1}$ (nach b)

Versuchen Sie für die Zahlenwerte $a = 2$, $c = 3$ und $d = 4$ den Zahlenwert für b herauszufinden. Verwenden Sie einmal den lg und einmal den ln. Was fällt Ihnen auf?

b) $\ln\left(\sqrt{b^2+1}\right) - a = 0$ (nach b)

c) $Kq^n = A \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}$ (nach n)