Übungsblatt 13: Bruch- und Wurzelgleichungen

Bruchgleichungen

<u>Musterbeispiel</u>

$$\frac{3}{4x-3} = \frac{1}{x}$$

<u>Lösung</u>

Definitionsmenge: Der Nenner darf nicht Null werden, daher setzt man jeden Nenner Null und erhält somit jene Werte von x, die ausgeschlossen werden müssen:

$4x - 3 \neq 0$ und $x \neq 0 \ \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{0; \tfrac{3}{4}\}$

1. Brüche erweitern, so dass beide den gemeinsamen Nenner haben

$$\frac{3 \cdot x}{x \cdot (4x-3)} = \frac{1 \cdot (4x-3)}{(4x-3) \cdot x}$$

2. Multiplizieren mit gemeinsamem Nenner

$$\frac{3 \cdot x}{x \cdot (4x-3)} = \frac{(4x-3)}{(4x-3) \cdot x} \Big| \cdot x \cdot (4x-3) \ \Rightarrow 3x = 4x - 3$$

3. Lösen der linearen Gleichung

$x = 3 \in D$

Lösungsmenge: $L = \{3\}$

<u>Aufgabe 1</u>

Bestimmen Sie die Definitionsmengen und lösen Sie die folgenden Bruchgleichungen über $\mathbb{R}$:

a) $\frac{1}{x-3} = 5$ b) $\frac{4}{x-2} = \frac{2}{x+1}$ c) $\frac{1}{1-x} = \frac{1}{x-1}$ d) $\frac{3x-5}{6x^2} + \frac{3x-1}{3x} = \frac{-9+5x}{6x}$

e) $9 = \frac{3x+1}{4} - \frac{2}{x-4}$ f) $\frac{7}{3} - \frac{3x+1}{6} = \frac{2}{6-x}$ g) $\frac{2}{1+x} - \frac{3}{1-x} = \frac{5}{x}$ h) $3 - \frac{35}{x-5} = \frac{-7x}{x-5}$

i) $1 - \frac{x^2}{x^2-3x+2} = \frac{9}{3x-6} + \frac{1}{x-1}$ j) $\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-6} = \frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-8}$ k) $\frac{x}{a} = \frac{1}{4} - \frac{2x}{3}, a \in \mathbb{R}$

Machen Sie zum Schluss jeweils die Probe, ob die gefundenen Lösungen die ursprüngliche Gleichung erfüllen!

Übungsblatt 13:
Bruch- und Wurzelgleichungen

Wurzelgleichungen

Musterbeispiel

$\sqrt{x-1}+3=x$

Lösung

Definitionsmenge: Der Term unter der Wurzel darf nicht negativ werden; daher setzt man den Term Null und findet somit jene Werte von x, die ausgeschlossen werden müssen:

$x - 1 \geq 0 \Rightarrow D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$ bzw. $D = [1; \infty)$

1. Gleichung so umformen, dass der Wurzelterm auf einer Seite alleine steht:
   $\sqrt{x-1}=x-3$

2. Quadrieren der Gleichung
   Achtung: Man sei sich dessen bewusst, dass Quadrieren keine Äquivalenzumformung ist! Es können unter Umständen „Scheinlösungen" generiert werden, daher → 4.
   $x-1=(x-3)^2=x^2-6x+9$
   $x^2-7x+10=0$

3. Lösen der quadratischen Gleichung
   $x_1 = 5 \in D$; $x_2 = 2 \in D$

4. Kontrolle, ob die gefundenen Lösungen „echte" Lösungen der Wurzelgleichung sind (durch Einsetzen in die ursprüngliche Gleichung)
   $\sqrt{5-1}+3=5$, w.A. $\Rightarrow x_1 = 5$ ist Lösung der Wurzelgleichung
   $\sqrt{2-1}+3=2$, f.A. $\Rightarrow x_2 = 2$ ist keine Lösung der Wurzelgleichung

Lösungsmenge: $L = \{5\}$

Aufgabe 2
Bestimmen Sie die Definitionsmengen und lösen Sie die folgenden Wurzelgleichungen über $\mathbb{R}$:

a) $\sqrt{2x}=4$ b) $\sqrt{x+1}=5$ c) $-x+\sqrt{x+3}=1$

d) $\sqrt{12x-3}-3=0$ e) $\sqrt{x}+2=x$

Machen Sie zum Schluss jeweils die Probe, ob die gefundenen Lösungen die ursprüngliche Gleichung erfüllen!

Aufgabe 3
Bestimmen Sie die Definitionsmengen und lösen Sie die folgenden Wurzelgleichungen über $\mathbb{R}$:

a) $\sqrt{7x+23}+\sqrt{7x-13}=2$ b) $\sqrt{7x+23}-\sqrt{7x-13}=2$

c) $\sqrt{2+x}+\sqrt{4x-3}=2$ d) $\sqrt{x+5}=1+\sqrt{2x+3}$

e) $\sqrt{x+2+\sqrt{2x+7}}=4$

Machen Sie zum Schluss jeweils die Probe, ob die gefundenen Lösungen die ursprüngliche Gleichung erfüllen!