

Übungsblatt 12: Potenzen und Wurzeln

Definitionen

$$a, b, p, q \in \mathbb{R}; n, m \in \mathbb{Z}$$

$$a^1 \stackrel{\text{def}}{=} a$$

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a \text{ (n-mal)}; a \dots \text{ Basis}; n \dots \text{ Exponent (Hochzahl)}$$

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \Rightarrow \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$$

$$(-a)^n = (-a) \cdot (-a) \cdot (-a) \cdot \dots \cdot (-a) \text{ (n-mal)} \quad -a^n = (-1) \cdot a^n$$

Rechenregeln mit Potenzen

$$\text{Multiplikation mit Skalar: } b \cdot a^n = b \cdot (a^n) \neq (b \cdot a)^n$$

$$\text{Addition gleichartiger Potenzen: } p \cdot a^n + q \cdot a^n = (p + q) \cdot a^n$$

$$\text{Multiplikation von Potenzen gleicher Basis: } a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\text{Division von Potenzen gleicher Basis: } \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$\Rightarrow a^0 = \frac{a^n}{a^n} = 1 \text{ und } a^{-m} = a^{0-m} = \frac{a^0}{a^m} = \frac{1}{a^m} \text{ und } a^{-1} = \frac{1}{a}$$

$$\text{Multiplikation von Potenzen gleicher Exponenten: } a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$$

$$\text{Division von Potenzen gleicher Exponenten: } \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

$$\text{Potenzieren einer Potenz: } (a^m)^n = (a^n)^m = a^{m \cdot n}$$

Musterbeispiel

$$\left(\frac{x^2}{x^4 y^{-4}}\right)^3 \cdot \left(\frac{x^4 y^{-2}}{x^{-2} y^3}\right)^2 \text{ ist möglichst zu vereinfachen.}$$

1. Schritt: Umwandeln der Potenzen mit negativen Exponenten

$$\left(\frac{x^2 y^4}{x^4}\right)^3 \cdot \left(\frac{x^4 \cdot x^2}{y^3 \cdot y^2}\right)^2$$

2. Schritt: Multiplikation und Division von Potenzen gleicher Basis

$$\left(\frac{y^4}{x^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{x^6}{y^5}\right)^2$$

3. Schritt: Potenzieren der Klammerausdrücke

$$\frac{y^{12}}{x^6} \cdot \frac{x^{12}}{y^{10}} = \frac{x^{12} y^{12}}{x^6 y^{10}}$$

4. Division von Potenzen gleicher Basis („Kürzen“)

$$\frac{y^{12}}{x^6} \cdot \frac{x^{12}}{y^{10}} = \frac{x^{12} y^{12}}{x^6 y^{10}} = x^6 y^2$$

Übungsblatt 12: Potenzen und Wurzeln

Aufgabe 1

Bringen Sie auf möglichst einfache Form ($n \in \mathbb{N}$):

a) $3a^3 \cdot 4a^5 + 2a^6 \cdot 6a^2 =$

b) $(a^2 - b^2) \cdot (3a^3 - 5b) =$

c) $2x^2y^3 \cdot (4xy^5 - 2yx^5 + 3x^2y^2) =$

d) $(-a)^{2n+3} \cdot a^{n+1} =$

e) $(-x^{2n})^{2n+1} =$

f) $(-a^n)^4 \cdot (-a)^{4n} =$

g) $[(b^3c^2d^5) \cdot ab^2c^5] \cdot [(a^3cd^2) \cdot c^7d^3] =$

h) $(-a)^{2n} \cdot (-a^{2+2}) =$

Achtung, psychologische Falle: $(-a)$ ist weder positiv noch negativ, man kann so noch keine Aussage machen. Erst durch Einsetzen entsteht eine positive oder negative Zahl!

Aufgabe 2

Stellen Sie mit positiven Exponenten dar:

a) $-a^{-2}$ b) $(-a)^{-2}$ c) $[(-a)^{-2}]^{-3}$

d) $\frac{a^{-4}b^5}{x^{-3}y^2} \cdot \frac{x^{-2}y}{a^3b^6}$ e) $\left(\frac{5a^3b^{-2}}{6x^{-1}y^4}\right)^3 / \left(\frac{12a^4x^{-3}}{10b^2y^{-2}}\right)^4$

Aufgabe 3

Berechnen und vereinfachen Sie so weit wie möglich:

a) $\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{x}$ b) $\sqrt[4]{27a^2b} \cdot \sqrt[4]{3a^2b^3}$ c) $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}}$

d) $(3s)^2 - 3s^2 - 3(-s)^2$ e) $\frac{5}{8}a^3 - \frac{7}{8}(-a)^3$

Aufgabe 4

Ziehen Sie teilweise die Wurzel, d.h. schaffen Sie Faktoren vor die Wurzel:

a) $\sqrt{20}$ b) $\sqrt{36a^4b^3}$ c) $\sqrt[4]{x^6 \cdot 625 \cdot y^5}$

Aufgabe 5

Bringen Sie den Vorfaktor unter die Wurzel:

a) $17\sqrt{x}$ b) $3a \cdot \sqrt[3]{ax^2}$

Aufgabe 6

Berechnen Sie:

a) $\frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5}}$ b) $\frac{x}{\sqrt[n]{x}}$ c) $\frac{\sqrt[4]{7^3}}{\sqrt[4]{7}}$