Übungsblatt 11: Polynome

Polynom vom Grad *n*

$$P_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

D = $\mathbb{R}$; $n \in \mathbb{N}$; $\forall a_k \in \mathbb{R}$; $a_n \neq 0$.

x_N ist Nullstelle $\Leftrightarrow$ $P_n(x_N) = 0$

Quadratische Funktion $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ mit $a_2 \neq 0$

Darstellung als Parabel $y = a\cdot(x - x_s)^2 + y_s$
Scheitelpunktkoordinaten $S(x_s;\ y_s)$

Diskriminante $\Delta = a_1^2 - 4a_0\cdot a_2$
$\Delta < 0 \Rightarrow$ keine reelle Lösung
$\Delta = 0 \Rightarrow$ eine reelle Doppellösung
$\Delta > 0 \Rightarrow$ zwei reelle Lösungen (Lösungsformel)

Musterbeispiel
Berechnen Sie den Scheitel und die Nullstellen des Polynoms
$f(x) = y = 2x^2 + 5x - 12$
Berechnung des Scheitels mithilfe der quadratischen Ergänzung (Darstellung als Parabel)
1. Koeffizienten a_2 herausheben
   $y = 2\cdot(x^2 + {}^5/_2\, x - 6)$
2. Bestimmung von x_s und y_s
   $y = 2\cdot[(x + {}^5/_4)^2 - {}^{25}/_{16} - 6]$
   $x - x_s = x + {}^5/_4 \Rightarrow x_s = -{}^5/_4$
   $y_s = 2x_s^2 + 5x_s - 12 = 2\cdot(-{}^5/_4)^2 + 5\cdot(-{}^5/_4) - 12 = -{}^{121}/_8$

Berechnung der Nullstellen:
1. Gesucht sind jene x, für die gilt, dass $f(x) = 0$
   $0 = 2x^2 + 5x - 12$
2. Lösen der quadratischen Gleichung
   $x_1 = -4$; $x_2 = {}^3/_2$

Aufgabe 1
Welche der folgenden Funktionen sind Polynome?
a) $f(x) = x^3 + 3^x$ b) $f(x) = -17x^{105} + 1$ c) $f(x) = x^2 + x^{-2}$ d) $f(x) = (x + 1)^3$
e) $f(x) = 2x^3 - 4x^{4/3} + 1$ f) $f(x) = 0{,}5\cdot x^3 + 1{,}7\cdot x^2 + 3{,}45\cdot x + 1{,}33$

Aufgabe 2
Bestimmen Sie die Koeffizienten a_i und den Grad der folgenden Polynome:
a) $f(x) = 2x^2 - x + 1$ b) $f(x) = -x + 4$ c) $f(x) = 0{,}1\cdot x^5 + 3{,}2\cdot x^4 + 3\cdot x$ d) $f(x) = x^7$
e) $f(x) = -\sqrt{3}\,x^7 + \pi\cdot x^6 - b\cdot x^2 + a\cdot x + c$ f) $f(x) = x^2 + 5{,}8\cdot x^3 - 0{,}5 + 2{,}3\cdot x$

Aufgabe 3
Erstellen Sie eine Wertetabelle für die nachfolgenden Funktionen. Zeichnen Sie die Zahlenpaare in ein Koordinatensystem von $-4 \leq x \leq 4$ und skizzieren Sie die Funktion.
a) $f(x) = x^2 - 6$ b) $f(x) = -{}^1/_2\, x^2 + 4$ c) $f(x) = x^2 - 2x$ d) $f(x) = (x + 1)^2$

Übungsblatt 11: Polynome

Aufgabe 4

Berechnen Sie den Scheitelpunkt der folgenden Parabeln und zeichnen Sie die Kurven:

a) $f(x) = {}^1/_3 \cdot (x - 3)^2$ b) $f(x) = (x - 2)^2 + 5$ c) $f(x) = 3x^2 - 12x + 6$

Sie können auch zuerst versuchen, die Koordinaten des Scheitels (x_s; y_s) allgemein als Funktion von a, b, c zu berechnen, um für später Arbeit zu sparen.

Aufgabe 5

Bestimmen und zeichnen Sie die Umkehrfunktionen zu

$f_1: \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+, y = x^2$

$f_2: \mathbb{R}_0^- \longrightarrow \mathbb{R}_0^+, y = x^2$

Aufgabe 6

Berechnen Sie die Nullstellen der folgenden Polynome:

a) $f(x) = x^2 - 3x - 2$ b) $f(x) = 2x^2 - 4x - 30$ c) $f(x) = 5x^2 - 20x + 20$

d) $f(x) = 2x^2 + 10x + 15$

Aufgabe 7

Bestimmen und zeichnen Sie die Umkehrfunktion zu

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, y = x^3$

Aufgabe 8

Die Preis-Absatz-Funktion eines Monopolisten, der nur eine Produktsorte auf dem Markt absetzt, ist im Allgemeinen eine fallende lineare Funktion. Für die folgende Aufgabe sei diese gegeben durch die Gleichung $p(x) = 1000 - x$. Zusätzlich sind die variablen Kosten pro Mengeneinheit mit K_{var} = 50 EUR und die Fixkosten mit K_{fix} = 175 000 EUR gegeben.
Berechnen Sie jene Menge, für die der Erlös maximal (= Scheitel!) ausfällt, und die Gewinnschwellen.