

Übungsblatt 9: Ungleichungen und Betragsgleichungen

Ungleichungen

Äquivalenzumformungen

Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt: $a \geq b \Leftrightarrow a + c \geq b + c$

(gilt analog für die Rechenzeichen $>$, $<$ und $\leq$)

Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$, $c > 0$ gilt: $a \geq b \Leftrightarrow a \cdot c \geq b \cdot c$

Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$, $c < 0$ gilt: $a \geq b \Leftrightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$; $a, b \neq 0$, gilt: $a \geq b \Leftrightarrow \frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$; $a \leq b \Leftrightarrow \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$

Intervalle

Siehe Übungsblatt 1, Seite 1

Musterbeispiel

$$-3x - 7 \leq 2x + 5$$

$$D = \mathbb{R}$$

1. äquivalente Umformungen, so dass auf der linken Seite nur mehr x steht:

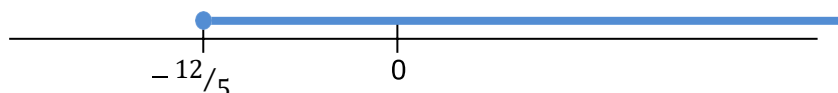
$$-3x - 7 \leq 2x + 5 \quad | +7 - 2x$$

$$-5x \leq 12 \quad | : (-5) \rightarrow \text{Ungleichheitszeichen umkehren}$$

$$x \geq -\frac{12}{5}$$

$$\text{Lösungsmenge } L = [-\frac{12}{5}; +\infty)$$

2. Darstellung entlang eines Zahlenstrahls:



Beachte: Der volle blaue Punkt beim Zahlenstrahl bedeutet, dass $-\frac{12}{5}$ dazugehört.

Aufgabe 1

Geben Sie die folgenden Mengen mit Hilfe von Intervallen an:

$$M_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$$

$$M_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 7\}$$

$$M_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3 \wedge x \geq -7\}$$

$$M_4 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 7 \vee x \leq 3\}$$

$$M_5 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \wedge x < 5\}$$

$$M_6 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3 \wedge x \geq 7\}$$

$$M_7 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -3 \vee x \geq 1\}$$

Aufgabe 2

Für welche Werte von x mit $x \in \mathbb{R}$ gelten die folgenden Ungleichungen?

a) $x + 2 < 2x - 3$

b) $3x - 50 > 12x + 76$

c) $3x - 20 \leq 10 + 6x$

Aufgabe 3

Zwei Liter 36 %iger Schwefelsäure sind mit Wasser so zu verdünnen, dass eine Mischung entsteht, deren Konzentration nicht kleiner als 10 % sein soll.

Wie viel Liter Wasser darf man maximal zugeben?

Aufgabe 4

Die Glieder der Zahlenfolge $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}$ mit $n \in \mathbb{N}$ werden immer größer, bleiben im Endlichen aber stets kleiner als 1. Ab welchem Glied sind sie größer als 0,98?

Musterbeispiel Skizzieren im Koordinatensystem

$$x + 3y \leq 9$$

$$D = \mathbb{R}$$

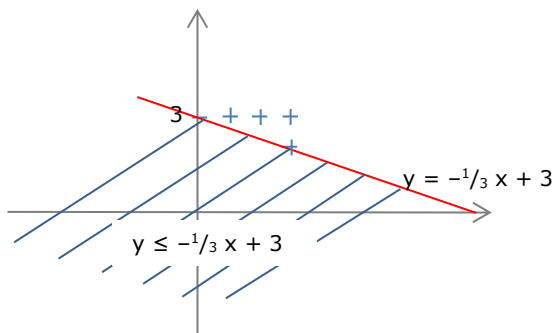
1. Umformen, so dass y auf der linken Seite alleine steht

$$x + 3y \leq 9 \quad | -x$$

$$3y \leq -x + 9 \quad | : 3$$

$$y \leq -\frac{1}{3}x + 3$$

2. Zeichnen der Funktion $y = -\frac{1}{3}x + 3$ im Koordinatensystem



Aufgabe 5

Skizzieren Sie die Lösungsmenge der folgenden Ungleichungen in einem kartesischen Koordinatensystem:

a) $5x + 4y \leq 20$ b) $3y \geq 6x - 9$ c) $4x - 3y > 12$ d) $6x - 9y + 18 \leq 0$

e) $6y \leq 21$ f) $4x > 14$

Betragsgleichungen und -ungleichungen

Musterbeispiel

$$|5 - 2x| \geq x + 1, \text{ Grundmenge sei } \mathbb{R}.$$

1. Zerlegung der reellen Zahlen in 2 Intervalle, und zwar in jene, in denen der Betragsterm positiv oder negativ ist ($\rightarrow$ Fallunterscheidung):

$$\text{Für } x \leq \frac{5}{2} \text{ gilt: } 5 - 2x \geq 0 \text{ (Fall 1); für } x > \frac{5}{2} \text{ gilt: } 5 - 2x < 0 \text{ (Fall 2).}$$

Bei der Lösung müssen diese beiden Fälle unterschieden werden.

2. Lösen der Ungleichung für Fall 1: $x \leq \frac{5}{2}$, d.h. für das Intervall $(-\infty; \frac{5}{2}]$:

$$5 - 2x \geq x + 1 \Rightarrow -3x \geq -4 \Rightarrow x \leq \frac{4}{3} \leq \frac{5}{2} \Rightarrow \text{zulässige Lösung.}$$

$$L_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{4}{3}\}$$

3. Lösen der Ungleichung für Fall 2: $x > \frac{5}{2}$, d.h. für das Intervall $(\frac{5}{2}; +\infty)$:

$$-(5 - 2x) \geq x + 1 \Rightarrow x \geq 6 > \frac{5}{2} \Rightarrow \text{zulässige Lösung}$$

$$L_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 6\}$$

$$\text{Lösungsmenge } L = L_1 \cup L_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{4}{3}\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 6\}$$



Aufgabe 6

Geben Sie die folgenden Mengen mit Hilfe von Intervallen an:

$$M_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq a\} \quad M_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq a\}$$

$$M_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 5| \leq 1\} \quad M_4 = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 5| \geq 1\}$$



Aufgabe 7

Finden Sie die Lösungsmenge zu folgenden Betragsgleichungen bzw. -ungleichungen über $\mathbb{R}$ und machen Sie die Probe!

a) $|4x - 6| = 38$

b) $|x| - 3x = 10$

c) $6 + 3x < |x - 8|$

d) $6 \leq |x - 5| < 11$